Д. С. Парчевская

СТАТИСТИКА ДЛЯ РАДИОЭКОЛОГОВ

НАУКОВА ДУМКА

КИЕВ—1969

Академия наук Украинской ССР
Институт биологии южных морей им. А.О.Ковалевского

Д.С.Парчевская

СТАТИСТИКА
ДЛЯ РАДИОЭКОЛОГОВ

(практическое руководство
по статистике и планированию
экспериментов в радиоэкологии)

Издательство "Наукова думка"
Киев - 1969

П Р Е Д И С Л О В И Е

В настоящее время имеется значительное число монографий по математической статистике, в которых достаточно полно освещено применение статистических методов обработки опытных данных и планирования экспериментов. Однако для широкого круга исследователей фундаментальные руководства по математической статистике, например книги Налимова, Хальда и Шефе, часто недоступны из-за отсутствия специальной математической подготовки.

Во время проведения практических занятий с сотрудниками Отдела морской радиобиологии Института биологии южных морей АН УССР по статистической обработке данных радиоэкологических исследований и планированию некоторых экспериментов было высказано пожелание издать в виде брошюры сводку основных формул и практических расчетов, необходимых для повседневной работы экспериментаторов.

В данное практическое руководство включено большое число примеров, облегчающих усвоение соответствующих методов. Среди них схема статистической обработки и бланк для ее реализации, которые стандартизируют применение критериев и облегчают вычислительные работы.

Нами строго оговорены условия, соблюдение которых необходимо для обоснованного применения статистических критериев. К сожалению, часто на это обращается недостаточно внимания, в результате чего неправильное применение критериев приводит к неправильным выводам.

В списке литературы отмечены только работы, в которых соответствующие вопросы освещены наиболее полно.

Таблицы и рисунки, помещенные в тексте, пронумерованы арабскими цифрами, а в приложении - римскими.

Руководство может быть полезным не только для радиоэкологов, радиобиологов, но и для других специалистов биологического профиля, особенно в области морской биологии.

СОСТАВЛЕНИЕ ВЫБОРОК

Выборкой из генеральной совокупности называют n элементов, объединенных по одному признаку. Она характеризует свойства явления, изучаемого в эксперименте. При составлении выборки необходимо выяснить: а) какие элементы генеральной совокупности должны быть включены в выборку; б) каким должен быть объем выборки. Включение элементов в выборку производится по схеме случайного выбора из генеральной совокупности. Такая схема основывается на следующем.

1. Средняя выборка должна обеспечивать несмещенную оценку генеральной средней. Это достигается в том случае, если все элементы генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность быть включенными в выборку.

2. Дисперсия выборки должна обеспечивать несмещенную оценку генеральной дисперсии, что необходимо для применения критериев значимости.

3. Целесообразность. Оценки среднего значения и дисперсии должны быть по возможности более точными, а затраты труда, времени и стоимости для достижения заданной точности должны быть минимальными.

Случайный выбор элементов из генеральной совокупности производится с помощью таблицы случайных чисел (см.приложение, табл.1)(Хальд, 1956; Налимов, 1960; Митропольский, 1961). Объем выборки в случае конечной генеральной совокупности можно находить с помощью формулы (Хальд, 1956).

$$\frac{1}{n} = \frac{V\{\bar{x}\}}{\sigma^2} + \frac{1}{N}\left(1 + \frac{V\{\bar{x}\}}{\sigma^2}\right),$$

где n – объем выборки, взятой из генеральной совокупности объем N; $V\{\bar{x}\} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$; β, α – граница области изменения x, т.е. $\beta < x < \alpha$. Пользуясь этими границами, можно получить оценку для σ^2 , применив прямоугольное распределение.

Если нет предварительных данных о природе явления, то для определения объема выборки пользуются таблицей достаточно больших чисел (см.приложение, табл.П) (Митропольский,1961; Хальд,1956).

На практике при составлении выборки редко используется описанный выше случайный выбор элементов. Вместо него элементы обычно отбирают через определенные интервалы или по заранее установленной схеме (Хальд,1956). Ниже рассматриваются такие схемы

1. Расслоенный случайный выбор применяется в том случае, если генеральная совокупность состоит из k групп или слоев. Из каждого слоя извлекается выборка случайным образом. Если слои могут быть образованы различными способами, то следует предпочесть тот, который дает наиболее однородные слои, т.е. когда дисперсии в пределах слоев были бы наименьшими.

Объем выборки при расслоенном случайном выборе оценивается, исходя из следующих условий: а) объем выборки для i-го слоя пропорционален весу (величине) слоя, или же б) объем выборки для i-го слоя пропорционален весу слоя и стандартному отклонению слоя.

Пример 1. Отбор проб красной водоросли филлофоры с филлофорного поля для оценки запасов филлофорного пласта. Для этого все поле делится на k квадратов, с каждого квадрата отбирается n проб, где n должно быть пропорционально размерам квадрата. Если квадраты одинаковы, то n для всех квадратов будет постоянным.

2. Систематический выбор со случайным началом. Если объем генеральной совокупности N разделен на N/n слоев (n - объем слоя) и требуется из каждого слоя выбрать один элемент, то выбор начального элемента в первом слое является случайным. Последующие елементы выбираются с постоянным интервалом, равным N/n.

Пример 2. Изучение ориентации корзинок цветущих подсолнечников в естественных условиях. Составление выборки производим в определенном квадрате поля подсолнечников. Начальный элемент выбираем случайным образом. После этого анализируем каждое десятое растение в каждом десятом ряду.

3. При двухступенчатом выборе вначале извлекаем случайную выборку в n_1 единиц первого порядка. Далее из каждой единицы первого порядка отбираем случайную выборку в n_2 единиц второго порядка.

Пример 3. Отбор икры рыб для опыта по изучению действия излучений стронция-90 на ее развитие. Вначале отлавливаем n_1 рыб (единицы первого порядка), затем из каждой рыбы отбираем случайную выборку в n_2 икринок (единицы второго порядка), причем для уменьшения разброса в один аквариум помещают икру от одной рыбы. Аналогичная ситуация возникает при отборе проб микробов, планктона.

ПРОВЕРКА СЛУЧАЙНОСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ВАРИАНТ В ВЫБОРКЕ

Случайный выбор элементов из генеральной совокупности должен дополняться детальным исследованием того, коррелируют ли изучаемые признаки или же изменяются случайным образом независимо друг от друга. Для выяснения этого существует несколько способов (Хальд,1956).

Пример 4. Методом восходящих и нисходящих серий исследуем, являются ли случайными элементы выборки, полученной в результате четырех опытов по изучению действия стронция-90 при концентрации 10^{-9} С/л на икру камбалы. Количественным выражением действия радионуклида в примере служит число хромосомных абберации в каждой икринке. Совокупность основных предположений необходимых для применения любого статистического критерия, обозначим через Ω . Для критерия восходящих и нисходящих серий Ω состоит в следующем: а) объем исследуемой выборки должен быть не меньше 20; б) элементы выборки нельзя менять местами, т.е. подвергается проверке ряд элементов, записанных в порядке их получения.

В четырех опытах имеется n =36 различных наблюдений:

I) I2,I; 20,2; I4,8; I4,4; II,6; I8,6; I4,0; I2,4; I7,9;
2) I4,9; I2,7; I7,5; II,9; I0,3; 23,7; I9,0; I4,8; I7,3;
3) I4,6; I4,4; I9,I; I8,2; I4,7; I5,8; I6,9; I2,8; I5,4;
4) I4,8; I4,2; I0,I; I5,8; I3,0; I6,5; I3,7; I3,8; I2,9.

Из наблюдений находим последовательность знаков ("+" или "-") у (n -I) разностей $x_{i+1} - x_i$, т.е. разность (20,2--I2,I) дает "+", (I4,8-20,2) дает "-", (I4,4-I4,8) дает "-" и т.д. В результате этого получим ряд +---+--+--+--+--+--+--++-+---+-+-+

Последовательность следующих друг за другом знаков "+" называется восходящей серией, а последовательность знаков "-"–нисходящей. Длина серии задается числом одинаковых знаков. Данная последовательность знаков состоит из восходящей серии длиной, равной I, нисходящей серии длиной, равной 3, восходящей серии длиной, равной I, нисходящей серии длиной, равной 2, и т.д.

Обозначим общее число серий буквой R. В данном примере R =24. Число серий длиной i обозначим буквой r_i. Так, r_1=I5; r_2 =7; r_3 =2. Число серий, длина которых больше или равна k, обозначим $R_k = \sum_{i=1}^{n-1} r_i$. В примере R_1 =24; R_2 =9; R_3 =2; R_4 =0.

В табл. I представлено математическое ожидание $M(R_k)$ числа восходящих и нисходящих серий с длиной, большей или равной k, в случайных расположениях из n различных чисел (Хальд, 1956).

Таблица I

K	$M(R_K)$
I	$\frac{1}{3}(2n-1)$
2	$\frac{1}{12}(3n-5)$
3	$\frac{1}{60}(4n-11)$
4	$\frac{1}{360}(5n-19)$
5	$\frac{1}{2520}(6n-29)$
6	$\frac{1}{20160}(7n-41)$
7	$\frac{1}{181440}(8n-55)$

Находим математическое ожидание числа серии наибольшей длины. В приводимом примере это число равно 3, т.е. $k=3$ для $n=36$,

$$M(R_k)=\frac{1}{60}(4n-11)=\frac{4\times 36-11}{60}=2,2\approx 2.$$

Таким образом, в случайно расположенных 36 различных числах может встретиться только две серии длиной $k=3$. В нашем же примере имеется также две серии длиной $k=3$, т.е. $R_3=2$. Это свидетельствует о том, что изучаемые признаки не коррелируют, т.е. изменяются случайным образом по отношению друг к другу.

СРЕДНЯЯ, ДИСПЕРСИЯ

Элементы выборки обозначим через x_i, т.е. $x_1, x_2, \dots, x_n$. Основные характеристики выборки:

1) объем выборки n;

2) среднее значение

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}; \qquad (1)$$

3) несмещенная оценка стандартного отклонения

$$s=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}. \qquad (2)$$

Пример 5. Ставим опыт по изучению действия на развивающуюся икру рыб стронция-90 при концентрации 10^{-9} С/л. Количественным фактором является число хромосомных абберации в каждой икринке. Просмотрено 10 икринок, в результате чего получен следующий ряд:

14,8; 14,2; 10,1; 15,8; 13,0; 16,5; 13,7; 13,8; 12,9; 11,8.

По формулам (1) и (2) находим

$$\bar{x}=\frac{14,8+14,2+10,1+15,8+13,0+16,5+13,7+13,8+12,9+11,8}{10}=$$

$$=\frac{136,6}{10}=13,7$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=(14,8-13,7)^2+(14,2-13,7)^2+(10,1-13,7)^2+(15,8-13,7)^2+$$
$$+(13,0-13,7)^2+(16,5-13,7)^2+(13,8-13,7)^2+(11,8-13,7)^2+(12,9-$$
$$-13,7)^2=1,21+0,25+13,32+4,41+0,49+7,84+0+0,01+0,64+3,64=31,81,$$

$$S = \sqrt{\frac{31,81}{9}} = \sqrt{3,53} = 1,88.$$

ГРАФИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАНДАРТНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

Для выборок с большим числом наблюдений n вычисления стандартного отклонения S связаны с большим количеством арифметических операций. Намного облегчает и ускоряет эти вычисления метод, предложенный А.З.Качем (личное сообщение Н.В.Лучника).

Если обозначить

$$Z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

то

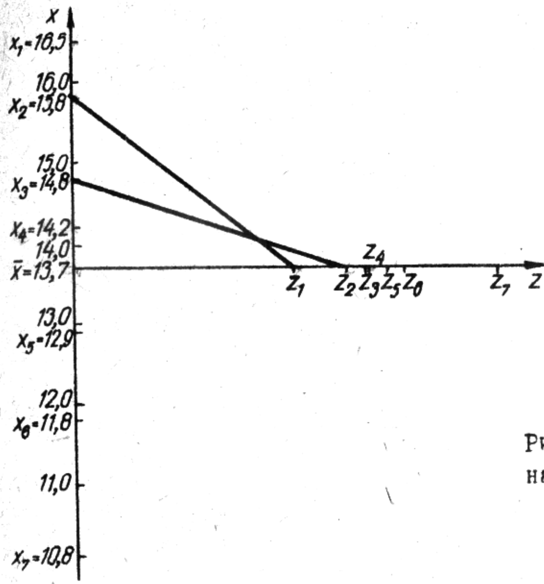
$$S = \frac{Z}{\sqrt{n-1}}.$$

А.З.Кач предложил величину Z находить графическим методом, суть которого заключается в следующем. В избранном масштабе на миллиметровой бумаге по оси ординат откладываем все наблюдения выборки x_i. Через среднюю величину $\bar{x}$ проводим линию, перпендикулярную к оси ординат, – ось Z (рис.1). Затем из точки $\bar{x}$ берем раствор циркуля до первой опытной точки x_1 и этот отрезок $\bar{x}x_1$ откладываем на оси Z, начиная от точки пересечения двух осей координат (точка $\bar{x}$) до Z_1 (отрезок $\bar{x}Z_1 = \bar{x}x_1$). Из конца полученного отрезка $\bar{x}Z_1$ (точка Z_1) берем раствор циркуля до второй опытной точки x_2 и снова откладываем от точки $\bar{x}$ на оси Z (отрезок $\bar{x}Z_2$). Аналогичное проделываем для всех остальных точек. Последний раствор циркуля и есть величина Z в избранном масштабе.

Описанным методом для того же примера вычислим S.

Последний раствор циркуля $\bar{x}Z_n$ равен 5,6 единицам. Тогда

$$S = \frac{5,6}{\sqrt{9}} = \frac{5,6}{3} = 1,87.$$



Доказательство этого графического метода вычисления z основано на простом соотношении квадратов величин гипотенузы c и двух катетов a и b в прямоугольном треугольнике: $c^2=a^2+b^2$.

Рис.I.Графическое нахождение величины z.

В треугольнике $\bar{x}z_1x_2$ катет $\bar{x}x_2 = |x_2| - |x_1|$, гипотенуза $x_2z_1 = \sqrt{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2} = \bar{x}z_2$. Далее в треугольнике $x_3\bar{x}z_2$ катет $x_3\bar{x} = |\bar{x}| - |x_3|$, а гипотенуза $x_3z_2 = \bar{x}z_3 = \sqrt{(\bar{x}-x_3)^2+(\bar{x}z_1)^2} = \sqrt{(\bar{x}-x_3)^2+(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2} = \bar{x}z_3$ и .т.д. Последний отрезок на оси z

$$z_n = \sqrt{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

КОЭФФИЦИЕНТ ВАРИАЦИИ, ХАРАКТЕРИСТИКИ АССИМЕТРИИ И ЭКСЦЕССА

Стандартное отклонение s является мерой рассеяния вариант вокруг среднего. Поскольку s зависит от размерности среднего значения $\bar{x}$, то вводят коэффициент вариации

$$v = \frac{s}{\bar{x}}\,100\,\%.$$

Коэффициент вариации для предыдущего примера

$$v = \frac{1,88}{13,7}\,100\,\% = 13,7\,\%.$$

Коэффициент вариации удобен и тем, что позволяет сравнивать вариабильности вариант выборок, значения которых имеют различную размерность, так как величина ν является безразмерной.

Коэффициент ρ_3 называется третьим основным моментом и является количественной характеристикой симметрии распределения генеральной совокупности:

$$\rho_3 = \frac{\xi^3}{s^3}, \qquad (3)$$

где

$$\xi^3 = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^3}{n};$$

s – оценка стандартного отклонения σ. Если $A = 0$, где A – несмещенная оценка коэффициента ρ_3 (табл.2), то распределение симметрично. Если же $A < 0$ или $A > 0$, то говорят соответственно об отрицательной или положительной асимметрии.

Коэффициент ρ_4 называется четвертым основным моментом и характеризует крутизну распределения:

$$\rho_4 = \frac{\xi^4}{s^4}, \qquad (4)$$

где

$$\xi^4 = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^4}{n}.$$

Обычно эксцесс кривой распределения характеризуют не значением ρ_4, а отклонением его от такового нормального значения, равного 3, т.е. $\rho_4 - 3$. Несмещенной оценкой коэффициента эксцесса является величина E /см.табл.2/.

Если $E > 0$, то распределение имеет более острую вершину, если же $E < 0$, то распределение имеет более тупую вершину по сравнению с нормальным.

Т а б л и ц а 2

Параметр нормального распределения	Несмещенная оценка параметра	Основная ошибка параметра
Среднее значение	$\bar{x} = \frac{\sum_{i}^{n} x_i}{n}$	$O_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
Стандартное отклонение	$s = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$	$O_s = \frac{s}{\sqrt{n}}$
Коэффициент вариации	$v = \frac{s}{\bar{x}}\, 100\%$	$O_v = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\, v \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{v}{100}\right)^2}$
Коэффициент ассиметрии	$A = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2}\,\rho_3$	$O_A = \sqrt{\frac{6}{n+3}}$
Коэффициент эксцесса	$E = \frac{(n^2-1)}{(n-2)(n-3)}\left[(\rho_4 - 3) + \frac{6}{n+1}\right]$	$O_E = \sqrt{\frac{24}{n+5}}$

ФОРМУЛЫ ПАРАМЕТРОВ ВЫБОРКИ И ИХ ОСНОВНЫХ ОШИБОК

В табл.2 сведены несмещенные оценки параметров нормального распределения и их основные ошибки.

Основная ошибка параметра рассчитывается, исходя из нормальности распределения варианта и указывает те границы, которые с вероятностью 0,683 заключают неизвестное значение соответствующего параметра, т.е. является основным стандартным отклонением последнего.

Пример 6. В результате эксперимента по изучению коэффициента накопления стронция-89 цистозирой была получена следующая выборка: 5I,5; 58,8; 53,3; 55,4; 57,5; 55,6; 55,4; 49,6; 53,I; 53,3. Вычислим для нее $\bar{x}, s, A, E, v$. Для этого удобно составить табл.3.

Таблица 3

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$
5I,5	-2,8	7,88	-22,I4	62,I7
58,8	4,5	20,25	9I,I3	4I0,06
53,3	-I,I	I,I6	-I,25	I,35
55,4	I,0	I,08	I,I2	I,I6
57,5	3,2	9,95	3I,38	98,96
55,6	I,2	I,52	I,86	2,29
55,4	I,0	I,08	I,I2	I,I6
49,6	-4,7	22,38	-I05,89	500,95
53,I	-I,3	I,6I	-2,04	2,59
53,3	-I,I	I,I6	-I,25	I,35
Σ_0=543,5	Σ_1=2I,9	Σ_2=68,07	Σ_3=-5,96	Σ_4=I082,06

Таким образом, из табл.3 вычисляем:

I) $\bar{x} = \frac{\Sigma_0}{n} = \frac{543,5}{10} = 54$; 2) $s = \sqrt{\frac{\Sigma_2}{n-1}} = \sqrt{\frac{68,07}{9}} = 2,8$;

3) $A = \frac{\sqrt{10 \cdot 9}}{8} \cdot \frac{\Sigma_3}{10 s^3} = -\frac{\sqrt{90}}{8} \cdot \frac{5,96}{10 \cdot 2,8^3} = -0,034$;

4) $E = \frac{100-1}{8 \cdot 7}\left[\left(\frac{\Sigma_4}{10 \cdot s^4} - 3\right) + \frac{6}{11}\right] = \frac{99}{56}\left[\left(\frac{1082,06}{10 \cdot 2,8^4} - 3\right) + \frac{6}{11}\right] = +0,995$;

5) $v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2,8}{54,4} = 0,051$.

КРИТЕРИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ РЕЗКО ВЫДЕЛЯЮЩИХСЯ ВАРИАНТ К ВЫБОРКЕ

При статистической обработке экспериментального материала часто сталкиваются с наличием в исследуемой совокупности некоторого количества вариант, значения которых довольно резко отличаются от основной массы наблюдений. Они могут обусловливаться естественной вариабильностью случайной величины или свидетельствовать о неоднородности статистической совокупности. Принадлежность резко выделяющихся вариант к выборке проверяется методом квантилей (Линник, 1958):

$$\tau_{max} = \frac{x_{max} - \bar{x}}{s}, \quad \tau_{min} = \frac{\bar{x} - x_{min}}{s}.$$

Условия применимости метода квантилей Ω : 1) варианты выборки распределены нормально; 2) объем выборки должен быть большим.

Находим одну из величин τ_{max} или τ_{min} в зависимости от того, какая величина (x_{max} или x_{min}) проверяется на принадлежность к выборке. Далее по заданному уровню значимости α и объему выборки n находим значение τ_{α} (см.приложение, табл.$\overline{\text{VI}}$). Если $\tau_{max} < \tau_{\alpha}$, то x_{max} принадлежит выборке, если $\tau_{max} < \tau_{\alpha}$, то x_{max} следует отбросить. Часто в биологических исследованиях задаются уровнем значимости α =0,05, который называется ошибкой $\underline{\text{I}}$ рода. Аналогично поступают в случае τ_{min}.

Пример 7. Был поставлен опыт по изучению коэффициента накопления стронция-89 стволиками цистозиры при равновесном состоянии. В результате найден объем выборки n =60. Таким образом, получена следующая выборка:

57,647; 79,4I2; 70,000; 80,882; 76,47I; 78,529; 84,4I2;
76,765; 8I,I76; 77,647; 85,I72; 85,I72; 80,345; 88,276;
84,828; 80,345; 93,448; 97,586; 89,655; 80,345; 72,778;
80,278; 80,278; 82,778; 78,333; 75,833; 58,055; 82,222;
70,833; 77,222; 85,000; 87,I88; 75,3I2; 89,062; 95,938;
90,625; 89,062; 88,750; 85,938; 86,562; 79,3I0; 74,I87;
92,069; 78,966;I02,759; 97,93I; 73,793; 91,724; 78,276;
66,4I0; 96,I52;I40,606;II5,862;I03,630;I02,727;I00,00;

115,454; 93,030; 96,667; 100,303.

Проверим на принадлежность к данной выборке варианту x_{max} =140,606.

В соответствии с формулами (1) и (2) имеем $\bar{x}$=85,983, S =16,704,

$$\tau_{max} = \frac{140,606-85,983}{16,704} = 3,27 .$$

Для $n = 60$ и уровня значимости α =0,05 τ_{05} =3,32 (см.приложение, табл.VI). Поскольку τ_{max} =3,27 $>\tau_{05}$=3,22, то варианта x_{max} =140,606 не принадлежит данной выборке и ее следует отбросить. Параметры $\bar{x}$ и S вычисляются заново, исходя из выборки объемом n =59:

$$\bar{x} = 85,057, \quad S = 11,602 .$$

Проверим x_{min} , т.е.

$$\tau_{min} = \frac{85,057-57,647}{11,602} = 1,607 .$$

Так как τ_{min} =1,607 $< \tau_{05} \approx$3,22, то варианту x_{min}=57,647 отбрасывать нельзя.

Для малых выборок существует упрощенный способ оценки принадлежности варианты к заданной совокупности (Урбах,1964). Этот способ менее точный по сравнению с методом квантилей и заключается в следующем.

Пример 8. Имеем выборку:

$$x_1 = 6, x_2 = 17, \ x_3 = 18, \ x_4 = 21 \ \text{ и } \ x_5 = 24.$$

Проверим x_1 и x_5 . Для этого вычислим

$$\tau' = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}, \quad \tau'' = \frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1} .$$

Здесь S оценивается величиной размаха.

Если $\tau' < \tau_{05}$ или $\tau'' < \tau_{05}$, то варианта не отбрасывается, если же $\tau' > \tau_{05}$ или $\tau'' > \tau_{05}$ то варианту следует отбросить как не принадлежащую данной выборке и вычислить заново все параметры для новой выборки объемом (n-1). Проверим цифру 6:

$$\tau'' = \frac{17 - 6}{21 - 6} = 0,76 .$$

Для $n=5$ и уровня значимости $\alpha=0{,}05$ (см.приложение, табл.VII) находим $\tau_{05}=0{,}807$; так как экспериментальное $\tau''<0{,}807$, то $x=6$ отбросить нельзя.

ПРОВЕРКА НОРМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВАРИАНТ В ВЫБОРКЕ

Случайная величина x_i называется нормально распределенной с параметрами μ и σ^2 или нормальной (μ,σ^2), если плотность вероятности функции распределения величины x_i

$$\Phi(u_i)=\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ - среднее, генеральной совокупности, σ^2 - дисперсия случайной величины, $\Phi(u_i)$ - плотность вероятности функции нормального распределения, или интеграл вероятностей (см.приложение, табл.III).

Поскольку нормальное распределение имеет наиболее простую математическую форму, то, естественно, статистические методы обработки его экспериментальных данных являются наиболее разработанными, чем для других теоретических распределений. На первом этапе статистической обработки данных необходимо определить вид распределения, которому подчиняются экспериментальные данные.

Для определения вида распределения необходимо проверить гипотезу на принадлежность выборки к генеральной совокупности, распределенной нормально. Это можно сделать несколькими путями. Наиболее простым является метод спрямления нормальной кривой, основанный на вычислении накопленных частостей (Хальд, 1956). Накопленной частотой N_i некоторого разряда или наблюдения называется сумма частот ряда распределения, начиная с частоты первого разряда и кончая частотой данного разряда

$$N_i=n'_1+n'_2+\cdots+n'_i,$$

где n'_i - частота разряда или отдельного наблюдения.

Отношение $p_i=N_i/n$ называется накопленной частостью, где n - объем выборки.

Пример 9. Вычисление накопленных частостей покажем на примере 5. Расположим варианты в порядке возрастания (табл.4).

Таблица 4

x_i	n_i	N_i	p_i
I0,I	I	I	0,I
II,8	I	2	0,2
I2,9	I	3	0,3
I3,0	I	4	0,4
I3,7	I	5	0,5
I3,8	I	6	0,6
I4,2	I	7	0,7
I4,8	I	8	0,8
I5,8	I	9	0,9
I6,5	I	I0	I,0

Метод спрямления нормальной кривой заключается в следующем. Строится система координат. По оси абсцисс откладываются варианты x_i, по оси ординат -величины функции $\Psi(p_i)$, которая является обратной величиной относительно интеграла вероятностей (см.приложение, табл.IУ). Эта таблица имеет один вход - накопленную частость.

Пример I0. Величины p_i и Ψ_i, вычисленные для примера 9, представлены в табл.5.

Таблица 5

p_i	Ψ_i
0,I	I,28
0,2	0,84
0,3	0,52
0,4	0,25
0,5	0,00
0,6	0,25
0,7	0,52
0,8	0,84
0,9	I,28
I,0	-

Если точки расположатся вдоль прямой линии, имеющей наклон $1/\sigma$, а точки прямой, имеющие ординаты -I и +I, будут соответствовать значениям x_i, равным $\bar{x}-\sigma$ и $\bar{x}+\sigma$, то варианты выборки будут иметь нормальное распределение. Так, в нашем примере (рис.2) $\bar{x}=13,7$; $s=1,88$;

$\bar{x}+s=13,7+1,88=15,58$;

$\bar{x}-s=13,7-1,88=11,82$.

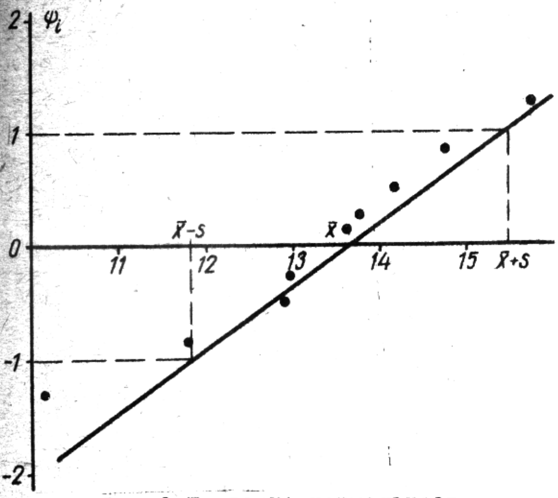


Рис.2.Проверка нормальности распределения

Следовательно, теоретической прямой будет линия, изображенная на рис.2. Существуют объективные критерии согласия экспериментального и теоретического распределений (Хальд, I956). При малой выборке ($n < 20$) случайное рассеяние точек так велико, что трудно обнаружить систематическое отклонение от прямой. Необходимо увеличить либо объем выборки, либо количество малых выборок.

Вместо того чтобы наносить значения $(x_i \Psi_i)$ на обыкновенную разграфленную бумагу, можно наносить значения $(x_i\, p_i)$ на бумагу, разграфленную специальным образом,- вероятностную бумагу (см.приложение, рис.I). Эта бумага обладает тем свойством, что вычерченный на ней график нормального распределения- прямая линия, имеет то преимущество, что значения $(x_i\, \Psi_i)$ наносятся непосредственно по значениям $(x_i\, p_i)$ без использования табл.IУ (см.приложение).

Разумеется, надежное определение характера распределения посредством изучения эмпирического материала требует больших объемов выборок ($n \approx 100$).

Другой метод определения вида распределения основан на свойствах нормального распределения (Урбах, I964). Условием нормальности распределения вариант является выполнение требований $A = 0$, $E = 0$.

Вычисляем коэффициент ρ_3, а вместо коэффициента эксцесса находим параметр c

$$\text{где} \quad c = \frac{|\xi|}{S}, \qquad \xi = \frac{\sum_{i}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n}. \qquad (5)$$

Если одновременно будут выполняться условия: I) $|\rho_3| \leq A_\alpha$ (см.приложение, табл.Ў) и 2) параметр c находится в пределах указанных в столбце c_α (см.приложение, табл.Ў), то распределение вариант можно считать нормальным.

Пример II. Проверим нормальность распределения вариант из примера 7.

Исходя из соотношения (3) и (5), имеем

$$\rho_3 = \frac{479,0108}{1561,8320} = 0,307,$$

$$c = \frac{8,922}{11,602} = 0,769.$$

Для n =59 и α =0,05 находим из табл.Ў (см.приложение) $A_{05}(59) \approx 0,492$, $c_{05} = (59) \approx 0,755 - 0,844$. Так как $\rho_3 = 0,307 < A = 0,492$ и $0,755 < C = 0,769 < 0,844$, то распределение вариант можно считать приблизительно нормальным.

Существует разновидность этого критерия. Если эмпирические коэффициенты ρ_3 и $(\rho_4 - 3)$ таковы, что нуль находится в пределах двух-или трехкратных основных ошибок, отложенных от них в обе стороны, то распределение можно считать нормальным. Поясним это на следующем примере.

Пример I2. Применим этот критерий к примеру 6. По формулам (3) и (4)

$$\rho_3 = \frac{-0,596}{2,8^3} = -0,03, \qquad \rho_4 = \frac{1082,06}{10 \cdot 2,8^4} = 1,89,$$

$$\rho_4 - 3 = -1,01.$$

Основные ошибки коэффициентов асимметрии и эксцесса таковы (см.табл.2)

$$O_A = \sqrt{\frac{6}{13}} = 0{,}68, \quad O_E = \sqrt{\frac{24}{15}} = 1{,}26.$$

Найдем величину $\rho_3 \pm 2 \cdot O_A$; $-0{,}03 + 2 \cdot 0{,}68 = \pm 1{,}33$; $-0{,}03 - 2 \cdot 0{,}68 = -1{,}39$. Так как одно значение положительное, а другое отрицательное, то нуль заключен в пределах двухкратной основной ошибки.

Найдем $(\rho_4 - 3) \pm 2 \cdot O_A$; $-1{,}01 + 2 \cdot 1{,}26 = +1{,}41$; $-1{,}01 - 2 \cdot 1{,}26 = -3{,}53$.

В данном случае нуль также заключен в интервале двухкратной ошибки. Это свидетельствует о том, что распределение вариант приблизительно нормальное.

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Если варианты в выборке распределены нормально или, если объем выборки n велик, то доверительным интервалом среднего значения $\bar{x}$ называется величина (Хальд, 1956)

$$\bar{x} = \mu \pm t_\alpha O_{\bar{x}}.$$

Здесь $O_{\bar{x}}$ - основная ошибка среднего значения $\bar{x}$ (см. табл.2), t_α находим по табл. $\overline{\underline{\text{УШ}}}$ (см.приложение), которая имеет два входа: уровень значимости и число степеней свободы. Покажем вычисление доверительного интервала на примере 5.

$$\bar{x} = 13{,}7; \quad s = 1{,}9; \quad O_{\bar{x}} = \frac{1{,}9}{\sqrt{10}} = \frac{1{,}9}{3{,}15} \approx 0{,}6.$$

Выбираем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, число степеней свободы $f = 10 - 1 = 9$; для $\alpha = 0{,}05$ и $f = 9$ $t_{05} = 2{,}26$. Доверительный интервал, в котором заключено генеральное среднее μ, в данном случае будет равен $13{,}7 \pm 2{,}26 \cdot 0{,}6 = 13{,}7 \pm 1{,}4$. Это означает, что в 95 случаях из 100 среднее значение будет находиться в пределах $12{,}3 < \mu < 15{,}1$.

СРАВНЕНИЕ ДИСПЕРСИЙ НЕСКОЛЬКИХ ВЫБОРОК

Часто требуется определить, значимо ли отличаются две выборки между собой или отличия обусловливаются флуктуацией изучаемого признака. Для этого необходимо проверить существенность отличия двух основных параметров выборки - средних значений $\bar{x}$ и дисперсий s^2. Сначала сравниваем дисперсии, а затем - средние. В зависимости от условий выбирается соответствующий метод сравнения.

Критерий Фишера. С помощью этого критерия сравниваются две дисперсии. Условия применения критерия Фишера Ω : 1) варианты двух выборок являются случайными; 2) варианты выборок распределены нормально. Метод состоит в следующем.

Находим величину

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \tag{6}$$

где

$$s_1^2 > s_2^2.$$

Эту величину необходимо сравнивать с табличным значением $F_\alpha(f_1, f_2)$ (см.приложение, табл.IX). Табл.IX (см.приложение) составлена для двух уровней значимости - α =0,05 и α =0,0I и имеет два входа - f_1 и f_2, где f_1 - число степеней свободы дисперсии s_1^2, а f_2 - число степеней свободы дисперсии s_2^2. Если $F > F_{05}(f_1, f_2)$, то различие следует считать значимым, если $F < F_{05}(f_1, f_2)$, то различие не значимо, т.е. s_1 и s_2 являются оценками одной величины стандартного отклонения генеральной совокупности. Необходимо иметь ввиду, что $F_\alpha(f_1, f_2) \neq F_\alpha(f_2, f_1)$.

Сравнение дисперсий по критерию Фишера приведено в примере I4.

Критерий Бартлетта. Часто возникает необходимость сравнить m выборочных дисперсий $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_m^2$ с объемами, равными $n_1, n_2, \ldots, n_m$ соответственно , т.е. проверить гипотезу $s_1^2 = s_2^2 = \ldots = s_m^2$. Такое сравнение проводится по критерию Бартлетта.

Применение критерия возможно при следующих условиях Ω : 1) варианты выборок должны быть случайными; 2) варианты выборок должны быть распределены нормально; 3) m величин χ_i^2 должны иметь распределение χ^2.

Критерий Бартлетта заключается в следующем.

Находим величины

$$s^2 = \frac{\sum_i^m n_i s_i^2}{\sum_i^m n_i}, \qquad (7)$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_i^m \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n}\right), \quad n = \sum_i^m n_i, \qquad (8)$$

$$\chi^2 = \frac{2,3026}{c}\left(n \lg s^2 - \sum_i^m n_i \lg s_i^2\right), \qquad (9)$$

где m - число дисперсий; n_i - объемы соответствующих выборок.

Выбираем необходимый уровень значимости α и по табл.X (см.приложение) находим χ^2_α для (m -I) степеней свободы.

Если вычисленное значение χ^2 превосходит табличное $\chi^2 > \chi^2_\alpha$, то проверяемая гипотеза отвергается, т.е. m дисперсий значимо отличаются. Если $\chi^2 < \chi^2_\alpha$, то дисперсии значимо не отличаются.

Критерий Бартлетта можно применять только в случае, если величины

$$\chi_i^2 = \frac{n_i s_i^2}{s^2} \qquad (10)$$

имеют распределение χ^2.

Критерий Бартлетта чрезвычайно чувствителен к нарушению нормальности распределения. Если варианты выборок распределены ненормально, то применяют приближенный критерий, основанный на анализе логарифмов выборочных дисперсий.

Пример I3. Изучим коэффициенты накопления стронция-89 целыми талломами цистозиры через 6, 8, I2,I4, I6,20 суток (табл.6).

Таблица 6

№ опыта	n_i	$\bar{x}$	s	Время, сутки
1	10	56,9	3,7	6
2	10	54,4	2,8	8
3	10	66,6	4,5	12
4	10	67,6	4,4	14
5	10	56,0	2,03	16
6	10	68	5,4	20

По критерию Бартлетта проверим гипотезу $s_1 = s_2 = \dots = s_6$. Сначала выясняем распределение величин χ_i^2 по формуле (10).

Нахождение величин χ_i^2 представлено в табл.7.

Таблица 7

s_i	s_i^2	n_i	$n_i s_i^2$	χ_i^2	p - интервал
3,7	13,69	10	136,9	8,7	50-60
2,8	7,84	10	78,4	5,0	10-20
4,5	20,25	10	202,5	12,9	80-90
4,4	19,36	10	193,6	12,3	80-90
2,0	4,00	10	40,0	2,5	1-2,5
5,4	19,16	10	291,6	18,6	95-97,5
		$\Sigma = 60$,	$\Sigma = 943,0$.		

Согласно соотношению (7)

$$s^2 = \frac{943,0}{60} = 15,71, \qquad s = 3,96.$$

Далее по табл.$\bar{X}$ (см.приложение) для $f = n_i - 1 = 9$ находим интервалы χ_p^2, в которых расположены вычисленные значения χ_i^2. После этого определяем соответствующие p - интервалы. Определим p - интервал для $\chi_1^2 = 8,7$, $f = 9$:

$$\chi^2_{0,50} = 8,34 < 8,7 < 9,41 = \chi^2_{0,60}.$$

В табл.$\bar{X}$ (см.приложение) представлены вероятности q получить значение χ_p^2, равное или большее наблюденного. Вероятность p получить значение χ_p^2 меньше наблюденного равна $1-q=p$:

$$f_1 = 9,\ \chi^2_2 = 5,\ \chi^2_{0,10} = 4,17 < 5 < 5,38 = \chi^2_{0,20},$$

$$f_2 = 9,\ \chi^2_3 = 12,9,\ \chi^2_{0,80} = 12,2 < 12,9 < 14,7 = \chi^2_{0,90},$$

$$f_3 = 9,\ \chi^2_4 = 12,3,\ \chi^2_{0,80} = 12,2 < 12,3 < 14,7 = \chi^2_{0,90},$$

$$f_4 = 9,\ \chi^2_5 = 2,5,\ \chi^2_{0,01} = 2,09 < 2,5 < 2,7 = \chi^2_{0,025},$$

$$f_5 = 9,\ \chi^2_6 = 18,6,\ \chi^2_{0,95} = 16,9 < 18,6 < 19,0 = \chi^2_{0,975},$$

P - интервалы записаны в шестом столбце табл.7.

Составим табл.8.

Таблица 8

P, %	χ^2_P	Числа набл.	Числа теорет.
0-I0	0-4,I7	I	0,6
I0-30	4,I7 -7,36	I	I,2
30-90	7,36-I4,7	3	3,6
90-I00	I4,7	I	0,6

В первом столбце записаны интервалы, на которые разбит весь I00%-ный диапазон вероятности согласно полученным интервалам, во втором - соответствующие им значения χ^2_P, найденные по табл. $\bar{X}$ (см.приложение), в третьем и четвертом столбцах - наблюденное и теоретическое количество величин χ^2_i в P-интервале. Например, $P\{4,17 < \chi^2_i < 5,38\} = 20 - 10 = 10\%$; это означает, что ожидаемое количество значений χ^2_i, лежащих между 4,I7 и 5,38, равно I0% от 6, т.е. 0,6.

Вычисление теоретического числа:

$$P\{0 < \chi^2_i < 4,17\} = 10 - 0 = 10\%,$$
$$P\{4,17 < \chi^2_i < 7,36\} = 30 - 10 = 20\%,$$
$$P\{7,36 < \chi^2_i < 14,7\} = 90 - 30 = 60\%,$$
$$P\{14,7 < \chi^2_i < \infty\} = 100 - 90 = 10\%.$$

Итак, I0% от 6 = 0,6; 20% от 6 = I,2; 60% от 6 = 3,6; I0% от 6 = 0,6.

Из сравнения наблюденных и теоретических чисел видно, что они удовлетворительно совпадают, т.е. величины χ_i^2 распределены по χ^2-закону. На основании этого переходим к сравнению дисперсий по критерию Бартлетта.

Сначала вычисляем величину c по формулам (8). В нашем примере $m=6$, а все n_i одинаковы и равны 9:

$$n = \sum_i^6 n_i = 54,$$

$$c = 1 + \frac{1}{15}\left(\frac{6}{9} + \frac{1}{54}\right) = 1{,}05.$$

Далее по соотношению (9) находим величину χ^2:

$$\begin{aligned} &\lg 15{,}7 = 1{,}196, && \lg 19{,}4 = 1{,}288,\\ &\lg 13{,}7 = 1{,}137, && \lg 4{,}00 = 0{,}602,\\ &\lg 7{,}8 = 0{,}85, && \lg 29{,}2 = 1{,}465.\\ &\lg 20{,}2 = 1{,}305, && \end{aligned}$$

$$\sum_i^6 n_i s_i^2 = 9\cdot 1{,}137 + 9\cdot 0{,}85 + 9\cdot 0{,}85 + 9\cdot 1{,}305 + 9\cdot 1{,}288 + $$
$$+ 9\cdot 0{,}602 + 9\cdot 1{,}465 = 9(1{,}137 + 0{,}85 + 1{,}305 + 1{,}288 + 0{,}602 + $$
$$+ 1{,}465) = 9\cdot 6{,}647 = 59{,}823.$$

Таким образом,

$$\chi^2 = \frac{2{,}30}{1{,}05}(54\cdot 1{,}196 - 59{,}82) = 2{,}19\cdot 4{,}76 = 10{,}42.$$

В табл.X (см.приложение) находим для числа степеней свободы $m - 1 = 5$, что $\chi^2_{0,10} = 9{,}24 < 10{,}42 < 11{,}1 = \chi^2_{0,50}$, т.е. с уверенностью на 50% может быть принята гипотеза

$$s_1^2 = s_2^2 = \dots = s_6^2.$$

Так как это недостаточный процент достоверности, то гипотеза отвергается.

СРАВНЕНИЕ СРЕДНИХ ДВУХ ВЫБОРОК

Если сравнение дисперсий по критерию Фишера или Бартлетта показало, что они значимо не отличаются, то можно приступать к сравнению средних по t-критерию Стьюдента.

Критерий Стьюдента. Для применения этого критерия необходимо, чтобы выполнялись условия Ω : 1) варианты обеих выборок не коррелированы; 2) варианты обеих выборок распределены нормально; 3) дисперсии сравниваемых выборок значимо не отличаются.

Пусть требуется сравнить две выборки со средними значениями $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ стандартными отклонениями s_1 и s_2 и объемами n_1 и n_2 Сначала находим объединенную дисперсию двух выборок:

$$S^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}, \tag{11}$$

$$S_1^2 = \frac{\sum_i^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}{n_1-1}, \quad S_2^2 = \frac{\sum_i^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_2-1}.$$

Затем вычисляем величину

$$t = \frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{s}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}. \tag{12}$$

Для определенного уровня значимости α и числа степеней свободы $f = n_1+n_2-2$ (см.приложение, табл. VIII) находим t_α. Если $t > t_\alpha$, то средние значимо отличаются, если же $t < t_\alpha$, то средние достоверно не отличаются.

Пример 14. В результате обработки двух экспериментов получим следующие параметры выборок:

$n_1 = 15$, $\bar{x}_1 = 5,6$, $S_1 = 1,2$,

$n_2 = 10$, $\bar{x}_2 = 9,4$, $S_2 = 1,6$.

Необходимо установить, значимо ли отличаются две выборки или отличие обусловливается случайными вариациями. Для этого сначала проверим отличие дисперсий по критерию Фишера. Согласно соотношению (6) получим

$$F = \frac{1,6^2}{1,2^2} = 1,78.$$

Для α =0,05 и степеней свободы $f_1 = 9$, $f_2 = 14$ (см.приложение, табл.IX) находим F_{05}=2,65. Так как $F = 1,78 < F_{05} = 2,65$, то отличие дисперсий не существенно. Это дает возможность сравнивать средние t-критерием Стьюдента. По формуле (II) имеем

$$S^2 = \frac{14 \cdot 1,2^2 + 9 \cdot 1,6^2}{23} = 1,878; \quad S = 1,37.$$

Далее по соотношению (I2) получим

$$t = \frac{9,4 - 5,6}{1,37} \sqrt{\frac{150}{25}} = 6,79.$$

Для α =0,05 и степеней свободы f =23 (см.приложение,табл.УШ) находим t_{05}=2,069. Так как t =6,79 $> t_{05}$=2,069, то отличие средних существенно.

Приближенный t-критерий. Если не выполняется третье ограничение, налагаемое на t-критерий Стьюдента, т.е. дисперсии значимо отличаются, то сравнение средних по этому критерию проводить нельзя. В таком случае сравнение средних $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ осуществляется по приближенному t-критерию, который состоит в следующем.

Находим величину

$$t_1 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}, \qquad (I3)$$

которая распределена приблизительно, как переменная Стьюдента t с f степенями свободы. Только число степеней свободы для t_1 определяется соотношением

$$f_1 = \frac{1}{\frac{u^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-u)^2}{n_2 - 1}}, \qquad (I4)$$

где

$$u = \frac{\frac{S_1^2}{n_1}}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}.$$

Значение t сравниваем со значением t_α (см.приложение, табл.УШ), которое находим по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы f_1 .

Если $t_1 > t_\alpha$, то отличие средних несущественно, а если $t_1 < t_\alpha$, то средние значимо отличаются.

Пример I5. В результате обработки двух экспериментов были получены следующие параметры выборок:

$\bar{x}_1 = 16{,}33, \qquad s = 8{,}1, \quad n_1 = 9,$

$\bar{x}_2 = 10{,}44, \qquad s = 1{,}5, \quad n_2 = 9.$

Сначала необходимо сравнить дисперсии методом Фишера:

$$F = \frac{8{,}1^2}{1{,}5^2} = 28{,}8.$$

Для $f_1 = 8$ и $f_2 = 8$ и уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ находим $F_{05} = 3{,}44$ (см.приложение, табл.$\overline{\text{IX}}$). Поскольку $F = 28{,}8 > F_{05} = 3{,}44$, то s_1 статистически реально превышает s_2. Поэтому для сравнения средних используем приближенный t-критерий.

Далее по соотношению (13) находим t_1:

$$s_1^2 = 65{,}61, \qquad \frac{s_1^2}{9} = 7{,}29,$$
$$s_2^2 = 2{,}28, \qquad \frac{s_2^2}{9} = 0{,}25,$$
$$t_1 = \frac{16{,}33 - 10{,}44}{\sqrt{7{,}29 + 0{,}25}} = \frac{5{,}89}{2{,}75} = 2{,}14.$$

Для данного t_1, согласно (14), число степеней свободы

$$f_1 = \frac{1}{\frac{0{,}94}{9} + \frac{0{,}0009}{9}} = \frac{1}{0{,}104} = 9{,}61.$$

Для $f = 10$ степеней свободы $t_1 = 2{,}14 < t_{05} = 2{,}23$, т.е. отличие несущественно. Таким образом, мы нашли, что значения средних значимо не отличаются друг от друга.

Если же пренебречь условием 3) из Ω и (вопреки правилам) применить в данном примере t-критерий Стьюдента, то можно прийти к неверным результатам. Покажем это.

Объединенная дисперсия

$$s^2 = \frac{18{,}22 + 526}{16} = 34{,}014.$$

Исходя из t-критерия Стьюдента, по соотношению (12) находим

$$t = \frac{5{,}89}{5{,}83}\sqrt{\frac{81}{18}} = 2{,}14.$$

По табл.$\overline{\text{УШ}}$ (см.приложение) для $f = 16$, $\alpha = 0{,}05$ находим $t_{05} = 2{,}12$. Поскольку $t = 2{,}14 > t_{05} = 2{,}12$, то $\bar{x}_1$ достоверно отличается от $\bar{x}_2$. Таким образом, неправильное применение t-критерия привело к принятию неправильной гипотезы.

ОБЪЕДИНЕНИЕ ВЫБОРОК

Если средние двух выборок значимо не отличаются друг от друга, то их необходимо объединить с учетом веса среднего каждой выборки (Урбах, 1964). Пусть $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ – средние выборок с объемами соответственно n_1, n_2; тогда объединенная средняя величина вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}.$$

Если требуется объединить m выборок, то их среднее значение $\bar{x}$ вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^m n_i \bar{x}_i}{\sum_i^m n_i},$$

где $\bar{x}_i$-средние значения каждой выборки; n_i – объемы соответствующих выборок; m – количество выборок.

Если дисперсии m выборок значимо не отличаются друг от друга, то возникает необходимость найти усредненную оценку общей дисперсии:

$$S^2 = \frac{1}{\sum_i^m n_i - m} \sum_i^m (n_i - 1) S_i^2 + \frac{1}{\sum_i^m n_i - 1} \sum_i^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2,$$

где $\bar{x}_i, S_i$-средние и дисперсии m выборок; n_i – их объемы; $\bar{x}$ – объединенная средняя величина.

Пример I6. Требуется объединить три выборки с одинаковыми объемами n_i =I0, средними значениями $\bar{x}_1$=66,6, $\bar{x}_2$=67,6, $\bar{x}_3$=68 и дисперсиями $S_1^2 = 20,2$, $S_2^2 = 19,4$, $S_3^2 = 29,2$:

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 66,6 + 10 \cdot 67,6 + 10 \cdot 68}{10 + 10 + 10} = 67,4,$$

$$S^2 = \frac{1}{30-3} (9 \cdot 20,2 + 9 \cdot 19,4 + 9 + 9 \cdot 29,2) +$$

$$+\frac{1}{30-1}\left[9(66,6-67,4)^2+9(67,6-67,4)^2+(68-67,4)^2\right]=$$
$$=23,24,$$

$$S=\sqrt{23,24}=4,8.$$

Объединенная выборка характеризуется следующими параметрами: $n=30$, $\bar{x}=67,4$, $S=4,8$.

Доверительный интервал для среднего необходимо вычислять, исходя из объединенной выборки:

$$67,4\pm 2,04\frac{4,8}{\sqrt{30}}=67,4\pm 1,8\approx 67\pm 2.$$

СХЕМА ОДНОФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Однофакторный дисперсионный анализ, или классификация по одному признаку, дает возможность сравнивать одновременно m средних значений.

Пусть имеем m одномерных выборок с одинаковыми объемами n.

Обозначим их средние через $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m$. Совокупность основных предположений Ω такова: 1/ варианты выборки являются случайными величинами; 2) варианты выборки распределены нормально; 3) дисперсии выборок значимо не отличаются. Требуется проверить гипотезу о равенстве средних всех выборок, т.е. $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\dots=\bar{x}_m$. Для проверки этой гипотезы используем F-критерий однофакторного дисперсионного анализа, который заключается в следующем (Урбах, 1964):

$$x_j=\sum_i^n x_{ij};\quad x=\sum_j^m x_j;\quad S_x=\frac{1}{mn}x^2;\quad S_j=\frac{1}{n}\sum_j^m x_j^2;$$

$$S_{ij}=\sum_j^m\sum_i^n x_{ij};\quad S_A=S_j-S_x;\quad S_Z=S_{ij}-S_j; \qquad (15)$$

$$S_A^2 = \frac{S_A}{f_A}; \quad S_Z^2 = \frac{S_Z}{f_Z}; \quad f_A = m-1; \quad f = m(n-1);$$

$$F = \frac{S_A^2}{S_Z^2}.$$

Здесь S_A^2 отражает вариации от строки к строке и называется дисперсией по изучаемому фактору A, а S_Z^2 – дисперсия случайных факторов, действующих на независимые переменные. Чтобы оценить значимость найденного значения F, надо воспользоваться табл. IX (см.приложение). Числа степеней свободы величин S_A^2 и S_Z^2 составляют соответственно $m-1$ и $m(n-1)$. Если $F<F_{05}$, то гипотеза о равенстве средних не отвергается.

Пример I7. Было поставлено четыре опыта по действию стронция-90 при концентрации 10^{-9} С/л на икру камбалы. Количественным фактором характеристики действия служило число хромосомных абберации в икринке, выраженное в процентах. В каждом опыте просмотрено 9 икринок. Требуется с уровнем значимости α =0,05 проверить гипотезу отсутствия различия количества хромосомных абберации в этих четырех опытах. Данные расположим в табл.9 После возведения x_{ij} в квадрат получим табл.I0.

Таблица 9

№ опыта	№ икринки									$x_j = \sum_i x_{ij}$	x_j^2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
I	I2,I	20,2	I4,8	I4,4	II,6	I8,6	I4,0	I2,4	I7,9	I36,0	I8496
2	I4,9	I2,7	I7,5	II,9	I0,3	23,7	I9,0	I4,8	I7,3	I42,I	20I92,4
3	I4,6	I4,4	I9,I	I8,2	I4,7	I5,8	I6,9	I2,8	I5,4	I4I,9	20I35,6
4	I4,8	I4,2	I0,I	I5,8	I3,0	I6,5	I3,7	I3,8	I2,9	I25,I	I5650,0

$\Sigma_1 = 545{,}1, \quad \Sigma_2 = 74474{,}0.$

Таблица I0

№ опыта	№ икринки									
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{2}$
I	I46,4I	408,04	2I9,04	207,36	I34,56	345,96	I96,00	I53,76	320,4I	2I3I,54
2	222,0I	I6I,29	306,25	I4I,6I	I06,09	56I,69	36I,00	2I9,04	299,29	2378,27
3	2I8,I6	207,36	364,8I	33I,24	2I6,09	249,64	285,6I	I63,84	273,I6	2268,9I
4	2I9,04	20I,64	I02,0I	249,64	I69,00	272,25	I87,69	I90,44	I66,4I	I758,I2

$\Sigma = 8536,84.$

Согласно формулам (I5) имеем

1) $x = \Sigma_1 = 545,1$;

2) $S_x = \dfrac{297134,01}{4,9} = 8253,72$;

3) $S_j = \dfrac{\Sigma_2}{9} = \dfrac{74474,03}{9} = 8274,89$;

4) $S_{ij} = \Sigma_3 = 8536,84$;

5) $S_A = 8274,9 - 8253,7 = 21,2$;

6) $S_Z = 8536,84 - 8274,9 = 261,95$;

7) $f_A = 3$; $f_Z = 4 \cdot 8 = 32$;

8) $S_A^2 = \dfrac{21,2}{3} = 7,06$;

9) $S_Z^2 = \dfrac{261,95}{32} = 8,19$;

$$F = \frac{8,19}{7,06} = 1,2.$$

Для $f_1 = 32$, $f_2 = 3$ и $\alpha = 0,05$ /см. приложение, табл. IX/ находим $F_{05} = 8,62$.

Так как $F = 1,2 < F_{05} = 8,6$, то гипотеза о равенстве средних не отвергается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ

Главным техническим приемом для определения необходимого числа наблюдений является вычисление мощности статистического критерия. Ошибки, возникающие при принятии той или иной гипотезы, можно классифицировать следующим образом.

I. Ошибкой I рода называется непринятие проверяемой гипотезы, когда в действительности она верна. Вероятность совершения такой ошибки обозначается через α и называется уровнем значимости критерия.

2. Ошибкой II рода называется принятие проверяемой гипотезы, когда она не верна. Вероятность совершения такой ошибки

обозначается через β и равна $\beta = 1 - M$, где M – мощность критерия. Таким образом, функция мощности критерия показывает вероятность вынесения правильного решения.

Выбор величины уровня значимости и мощности критерия в некотором смысле произволен и зависит от характера исследований и поставленной задачи. В биологических экспериментах уровень значимости $\alpha = 0,05$ считается достаточно надежным. Однако при исследовании, уточняющем предыдущие результаты, а также в задачах о затрате средств и труда целесообразно применять более низкие уровни значимости $\alpha = 0,01$ и даже $\alpha = 0,001$. Мощность критерия в биологических исследованиях можно считать экономически достаточной 0,9.

НАХОЖДЕНИЕ ОБЪЕМА ВЫБОРКИ НА ОСНОВАНИИ ФУНКЦИИ МОЩНОСТИ u-КРИТЕРИЯ

На основании функции мощности u-критерия, который используется при определении доверительных интервалов среднего значения, можно найти достаточное количество параллельных экспериментов, необходимое для достижения заданной точности (Налимов, 1960; Хальд, 1956):

$$n = (u_{1-\beta} + u_{1-\alpha})^2 \left(\frac{s}{\delta}\right)^2, \tag{16}$$

где $u_{1-\beta}$ и $u_{1-\alpha}$ находим по табл. IV /см. приложение/, которая имеет один вход – вероятность p (в данном случае $p_1 = 1-\beta$, $p_2 = 1-\alpha$); δ – разница между генеральным средним μ и средним x, т.е. $\delta = \mu - \bar{x}$.

Пример 18. Необходимо найти число параллельных определений n коэффициента накопления K стронция-89 бурой водорослью цистозирой, чтобы вероятность α появления ошибки I рода была не более 0,05, а вероятность появления ошибки II рода – не более 0,1, т.е. мощность u – критерия должна быть равна 0,9. Поскольку истинный коэффициент неизвестен, то допустим, что δ не будет превышать величины стандартного отклонения s. Тогда, согласно (16), получим

$$n = (u_{1-0,1} + u_{1-0,05})^2 \left(\frac{s}{s}\right)^2 = (u_{0,9} + u_{0,95})^2.$$

В табл. IУ (см.приложение) находим для P_1 =0,95, $u_{0,95}$=I,64; для P_2 =0,9; $u_{0,9}$=I,28, т.е.

$$n = (\,1{,}28 + 1{,}64\,)^2 \approx 9.$$

Итак, при сделанных предположениях достаточно сделать по 9 повторностей на каждую точку.

НАХОЖДЕНИЕ ОБЪЕМА ВЫБОРКИ НА ОСНОВАНИИ ФУНКЦИИ МОЩНОСТИ F-КРИТЕРИЯ ОДНОФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Мощность F-критерия однофакторного дисперсионного анализа однозначно связана с функцией (Шеффе, I963)

$$\Phi = \left(\frac{\frac{1}{2} n_i}{m}\right)^{1/2} \frac{\Delta}{s},$$

где n_i - объемы выборок; m - количество выборок; Δ - размах вариант (разность между наибольшим и наименьшим значениями), известный из предварительного опыта. Для определенного уровня значимости α и соответствующих степеней свободы f_1, f_2 составлены диаграммы Пирсона - Хартли значений функции Φ в зависимости от мощности F-критерия (см.приложение, рис.П-IX).

Пример I9. Требуется определить, сколько икринок необходимо проанализировать в каждом из четырех опытов (пример I7), чтобы с уровнем значимости α = 0,05 мощность F-критерия составляла M_1 = 0,9.

Поскольку не всегда возможно точно оценить величины стандартного отклонения s и размаха вариант Δ, то условимся, что размах Δ не превышает величины $2s$. Тогда функция

$$\Phi = \left(\frac{\frac{1}{2} n_i}{m}\right)^{1/2} \frac{2s}{s} = \sqrt{\frac{2n_i}{m}}.$$

Так как m = 4, то

$$\Phi = \sqrt{\frac{n_i}{2}} . \qquad (17)$$

Воспользуемся диаграммами Пирсона - Хартли для $f_1 = 3$, $\alpha = 0,05$ (см.приложение, рис.IV). Для нахождения n_i в первом приближении на кривой $f_2=\infty$ для $M = 0,9$ находим значение $\Phi = 1,9$. Подставляя $\Phi = 1,9$ в формулу /17/ и разрешая относительно n_i, находим $n_i = 2 \cdot 1,9^2 = 7,2$.

Первое приближение n_i, найденное по кривой $f_2=\infty$, будет всегда недостаточным. Для любого конечного f_2 необходимо выбирать кривую правее кривой $f_2=\infty$ На выбранной кривой при $M = 0,9$ значение Φ больше найденного 1,9 и, следовательно, n_i тоже будет больше. Если округлить $n_i = 7,2$ до большего целого, т.е. до $n_i = 8$, то

$$f_2 = m(n_i - 1) = 4(8-1) = 4 \cdot 7 = 28.$$

Тогда

$$\Phi = \frac{\sqrt{8}}{1,4} = 2,02 .$$

Интерполируя на глаз кривые Пирсона - Хартли между кривыми $f_2 = 30$ и $f_2 = 20$, находим, что при $f_2 = 28$ и $\Phi = 2,02$ мощность критерия $M = 0,9$, т.е. получим заданную мощность. Если бы мощность получилась меньше заданной величины, то надо было бы увеличить n_i, т.е. взять $n_i = 9$, найти $\Phi = \sqrt{\frac{9}{2}}$ и по ней определить M, и продолжать эту операцию до тех пор, пока не получим $M = 0,9$.

Таким образом, в каждом опыте необходимо просмотреть по 8 икринок, чтобы с уровнем узначимости $\alpha = 0,05$ и уверенностью $M = 0,9$ можно было делать выводы о средних значениях.

НАХОЖДЕНИЕ ОБЪЕМА ВЫБОРКИ ПО ВЕЛИЧИНЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ

Во многих случаях дополнительным методом вычисления объемов выборок является определение такого объема, который обеспечивает достаточную узость доверительных интервалов для интересующих нас величин. Однако предварительно необходимо провести ориентировочные исследования для определения величин $\bar{x}$ и $\bar{S}$.

Объем выборки n выбирается с таким расчетом, чтобы ошибка результата опыта не превышала заданной относительной неточности ε с определенным уровнем значимости α:

$$n = \frac{u_\alpha^2}{\varepsilon^2} v^2,$$

где v - коэффициент вариации, величина которого должна быть оценена из предварительного опыта; u_α находим по табл. VIII (см.приложение) для заданного уровня значимости α и $n=\infty$.

Пример 20. Требуется определить объем выборки n в опыте по изучению коэффициента накопления стронция-89 цистозирой. Необходимо, чтобы при уровне значимости $\alpha = 0,05$ и коэффициенте вариации $v = 0,3$ неточность в определении коэффициента накопления не превышала 19%. При $\alpha = 0,05$, $u_{05} = 1,96$.

Для $v = 0,3$, $\varepsilon = 0,19$, $u_{05} = 1,96$

$$n = \frac{(1,96)^2}{(0,19)^2}(0,3)^2 \approx 10.$$

Таким образом, при сделанных предположениях необходимо провести эксперимент, объем выборки которого следует взять равным 10.

НАХОЖДЕНИЕ ОБЪЕМА ВЫБОРКИ С ПОМОЩЬЮ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

Если ничего не известно о свойствах исследуемого явления и неизвестен характер распределения случайной величины, то для определения объема выборки можно пользоваться неравенством Чебышева.

$$P(|x-\mu| > \alpha\sigma) < \frac{1}{\alpha^2}.$$

Это неравенство показывает, что вероятность предположения что случайная величина лежит вне интервала $\mu - \alpha\sigma < x < \mu + \alpha\sigma$ не превосходит $1/\alpha^2$ и, таким образом, дает хорошее представление о том, в каком смысле σ может быть использована как мера рассеяния. Основным условием применимости этого неравенства является требование постоянства величины μ - среднего значения генеральной совокупности.

Пример 2I. Применим неравенство Чебышева для нахождения среднего значения коэффициента накопления $\bar{K}$:

$$P\left(|\bar{K} - \hat{K}| > \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \frac{1}{\alpha^2},$$

где $\hat{K}$ - истинное значение коэффициента накопления (генеральное среднее); σ - стандартное отклонение; n - объем выборки; α - некоторое положительное число.

Обозначим $\dfrac{\alpha\sigma}{\sqrt{n}} = \alpha\sigma_{\bar{K}} = d$,

тогда

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{nd^2}. \qquad (I8)$$

Для того чтобы выборочный коэффициент накопления $\bar{K}$ отличался от истинного коэффициента $\hat{K}$ не более чем на $0{,}6\sigma = d$ с вероятностью 0,95, объем выборки находится следующим образом (Налимов, I960). В формулу (I8) подставляются заданные параметры

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{(0{,}6\sigma)^2 n} = \frac{1}{0{,}36n}.$$

По условию задачи величина $1/\alpha^2$ должна быть равна вероятности I-0,95 = 0,05, т.е.

$$\frac{I}{0{,}36n} = 0{,}05, \qquad n = \frac{I}{0{,}05 \cdot 0{,}36} \approx 56.$$

Это означает, что для надежных выводов относительно коэффициента накопления необходимо составить выборку объемом $n \approx 56$.

ВЛИЯНИЕ НАРУШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ

В работе Шеффе дано детальное исследование влияния нарушения основных предположений Ω. Оно сводится к следующему:

1. Нарушение предположения о случайности вариант в выборках, т.е. наличие корреляции признаков, может серьезно влиять на выводы о средних, полученных на основании критерия Стьюдента, при нахождении доверительного интервала и F - критерия дисперсионного анализа.

2. Нарушение нормальности распределения вариант выборки оказывает слабое влияние на выводы о средних, но очень сильно влияет на выводы о дисперсиях, полученных на основании критерия Фишера, критерия Бартлетта и при нахождении доверительных интервалов для дисперсии.

Критерий Бартлетта при проверке равенства дисперсий в случае $E<0$ (E-коэффициент эксцесса) несколько затушевывает отличие дисперсий, когда оно существует. Если $E>0$, то критерий Бартлетта может показать отличие дисперсий, если его не существует.

3. Для проведения дисперсионного анализа одним из предположений было равенство дисперсий выборок. Нарушение этого предположения мало влияет на выводы о средних, если объемы выборок n_i равны, и сильно влияет, если они не равны.

КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Часто по экспериментальным данным можно видеть связь или корреляцию между изучаемыми признаками, например между дозой облучения и хромосомными абберациями в икре. Важнейшей задачей теории корреляции является:

1) построение численного параметра, который давал бы количественное выражение степени или силы корреляции между признаками; такими величинами являются коэффициент корреляции, если связь не линейна;

2) нахождение корреляционного уравнения.

Вычисление коэффициента корреляции и корреляционного уравнения покажем на примере линейной зависимости роста домиков балянуса.

Таблица II

n	x_i	y_i	y_i^2	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(5)\cdot(6)$	$(5)-(6)$	10^2	x_i^2
I	0,5	0,65	0,4225	-3,36	-6,28	II,2896	39,4384	+2I,I008	+2,92	8,5264	0,25
2	I,I7	I,3I	I,7I6I	-2,69	-5,62	7,236I	3I,5844	+I5,II78	+2,93	8,5849	I,3689
3	I,83	3,03	9,I809	-2,03	-3,90	4,I209	I5,2I	+ 7,9I7	I,87	3,4969	3,3489
4	2,33	5,I7	26,7289	-I,53	-I,76	2,3409	3,0976	+ 2,6928	0,23	0,0529	5,4289
5	3,I7	6,57	43,I649	-0,69	-0,36	0,476I	0,I296	+ 0,2484	-0,33	I,089	I0,0489
6	4,33	8,53	72,7609	+0,47	+I,60	0,2209	2,56	+ 0,752	-I,I3	I,2769	I8,7489
7	5,I7	8,9	79,2I	+I,3I	+I,97	I,7I6I	3,8809	+ 2,5807	-0,66	0,4356	26,7289
8	5,9	I0,37	I07,5369	+2,04	+3,44	4,I6I6	II,8336	7,0I76	-I,40	I,96	34,8I
9	6,67	I2,00	I44,0000	+2,8I	5,07	7,896I	25,7049	I4,2467	-2,26	5,I076	44,4889
I0	7,5	I2,73	I62,0529	+3,64	5,80	I3,2496	33,64	2I,II2	-2,I6	4,6656	56,25
	$\Sigma_1=38{,}57$	$\Sigma_2=69{,}26$	$\Sigma_3=646{,}7740$	$-0{,}03$	$-0{,}04$	$\Sigma_4=52{,}7079$	$\Sigma_5=167{,}0794$	$\Sigma_6=92{,}7858$	$-0{,}01$	$\Sigma_7=35{,}1958$	$\Sigma_8=201{,}4723$

Пример 22. Приводятся данные, наблюденные с ноября 1965 г. по август 1966 г., по увеличению длины домиков трех только что осевших *Balanus improvisus Darwin*. Наблюдения производились одновременно, и поэтому измерительные данные для каждой временной точки усреднялись. Необходимо найти степень зависимости длины домиков от времени.

Составляем табл. 11. В первом столбце записываем порядковые номера испытаний, во втором и третьем - наблюденные значения исследуемых величин.

Находим значения средних

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_1}{n} = \frac{38,57}{10} = 3,86; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma_2}{n} = \frac{69,26}{10} = 6,93.$$

В пятом и шестом столбцах помещаем отклонения вариант выборок от соответствующей средних. Объяснение остальных столбцов не вызывает затруднений.

На основании Σ_4 и Σ_5 находим стандартные отклонения выборок

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma_4}{n}} = \sqrt{\frac{52,7079}{10}} = 2,2958,$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma_5}{n}} = \sqrt{\frac{167,0794}{10}} = 4,0875.$$

Из девятого столбца находим смешанный начальный момент первого порядка:

$$\mu_1 = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})(y_i - y)}{n} = \frac{\Sigma_6}{n} = \frac{92,7858}{10} = 9,2786.$$

Коэффициент корреляции

$$r = \frac{\mu_1}{S_x S_y} = \frac{9,2786}{2,2958 \cdot 4,0875} = 0,9889. \qquad (19)$$

Два столбца, одиннадцатый и двенадцатый, служат для проверки вычислений. По результату одиннадцатого столбца находим

$$\mu_2 = \frac{\Sigma_7}{n} = \frac{35,1958}{10} = 3,519,$$

$$\mu_2' = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n} + \frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{n} - 2\mu_1 =$$

$$= 5,2708 + 16,7079 - 18,5572 = 3,422.$$

Если $\mu_2 \approx \mu_2'$, то вычисления проведены верно.

Если при увеличении значений одного признака средние значения другого возрастают, то корреляцию считают положительной; если же при увеличении одного признака средние величины другого уменьшаются, то корреляция отрицательная.

Коэффициент корреляции r изменяется в пределах от -1 до $+1$. Если $r = \pm 1$, то корреляция полная, если $r = 0$, то корреляция отсутствует.

КОРРЕЛЯЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И КОЭФФИЦИЕНТ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Корреляционное уравнение имеет вид

$$y = \bar{y} + r\frac{s_y}{s_x}(x-\bar{x}).$$

Для примера 22 линия регрессии изображена на рис.3:

$$y = 6,93 + 0,989 \ \frac{4,088}{2,296} \ (x - 3,86);$$

$$y = 0,14 + 1,76\,x.$$

Величина $b_{y/x} = r\frac{s_y}{s_x}$ называется коэффициентом линейной регрессии. В примере 22

$$b_{y/x} = 0,989 \ \frac{4,088}{2,296} = 1,759.$$

КРИТЕРИЙ ЗНАЧИМОСТИ РЕГРЕССИИ

Если коэффициент регрессии получился очень малым, то естественно, возникает вопрос, является ли коэффициент регрес-

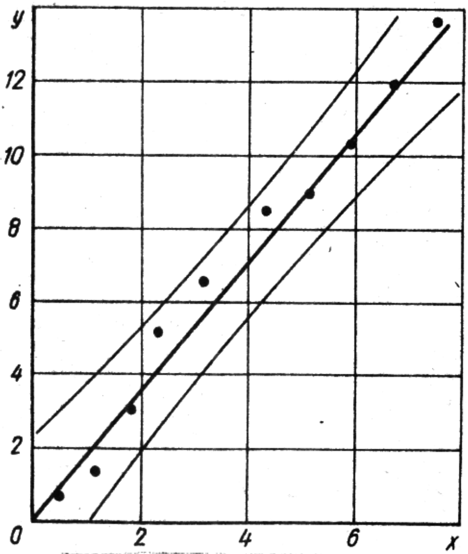


Рис.3.95%-ная доверительная зона линии регрессии.

сии значимым, т.е. достоверно ли отличие коэффициента регрессии от нуля. Проверка гипотезы равенства генерального коэффициента регрессии нулю $\beta_{y/x}=0$ основывается на том, что величина

$$t=\frac{b_{y/x}-\beta_{y/x}}{S_b}$$

имеет распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. Здесь

$$S_b=\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}\cdot\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_{xx}}}, \qquad (20)$$

$$\Sigma_{xx}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}, \qquad (21)$$

$$\Sigma_{yy}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{\left(\sum_{1}^{n}y_i\right)^2}{n}. \qquad (22)$$

Из табл. УШ (см.приложение) для $f=n-2$ и α = 0,05 находим величину t_{05} Если $t>t_{05}$, то отличие является значимым, а если $t<t_{05}$, то отличие не достоверно.

Пример 23. Проверку значимости коэффициента регрессии покажем на примере 22. Согласно формулам (20), (21), и (22) имеем

$$\Sigma_{xx}=\Sigma_8-\frac{(\Sigma_1)^2}{n}=201{,}4723-\frac{38{,}57^2}{10}=57{,}7078,$$

$$\Sigma_{yy} = \Sigma_3 - \frac{(\Sigma_2)^2}{n} = 646{,}7740 - \frac{69{,}26^2}{10} = 167{,}0792,$$

$$S_b = \sqrt{\frac{1-0{,}9889^2}{8} \cdot \frac{167{,}0792}{52{,}7078}} = \sqrt{0{,}00875} = 0{,}0935.$$

Далее найдем величину

$$t = \frac{1{,}758 - 0}{0{,}0935} = 18{,}802.$$

Для f = 8 и α = 0,05 (см.приложение, табл.УШ) t_{05} = 2,306.

Так как t = 18,802 $\gg t_{05}$ = 2,306, то коэффициент регрессии статистически значим.

КРИТЕРИЙ ЛИНЕЙНОСТИ КОРРЕЛЯЦИИ

Для определения порядка корреляционного уравнения вычисляем критерий линейности ζ и его основную ошибку O_ζ. Покажем это на примере 22.

$$\zeta = 1 - r = 1 - 0{,}989^2 = 0{,}022.$$

$$O_\zeta = \sqrt{\frac{\zeta}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}022}{10}} = 0{,}047.$$

Если величина критерия ζ окажется достаточно малой в сравнении с его основной ошибкой O_ζ, то можно считать корреляцию линейной, т.е. если $\frac{\zeta}{O_\zeta} < 1$, как в примере 22 $\frac{\zeta}{O_\zeta}$ = 0,47, то можно остановиться на первой степени корреляционного отношения.

Более строгая проверка линейности корреляционного отношения проводится на основании дисперсионного анализа (Урбах,1964).

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

При построении доверительного интервала исходя из того, что величина $\frac{\bar{x}-\mu}{S_x}$ имеет распределение Стьюдента ($\bar{x}$ - выборочное; μ - генеральное среднее; S_x - стандартная ошибка величины x). Это условие выполняется в том случае, если выборочные средние распределены нормально. Поэтому необходимо, чтобы распределение вариант в совокупности не слишком отличалось от нормального. Так как r изменяется в пределах от - I до +I, то распределение r заведомо не нормально. Чтобы обойти это затруднение, Фишер предложил ввести вспомогательную величину

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r},$$

которая однозначно связана с r и распределена приблизительно нормально.

Доверительные границы коэффициента корреляции находим в следующем порядке.

1. По вычисленному r находим z. Переход от r к z и обратно можно найти в табл.XI (см.приложение).

2. Вычисляем стандартную ошибку величины z:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}},$$

где n - объем выборки.

3. Далее находим величины

$$z_1 = z - t_{05}\sigma_z \quad \text{и} \quad z_2 = z + t_{05}\sigma_z,$$

где t_{05}-величина, соответствующая уровню значимости α = 0,05. Она находится по табл.УШ (см.приложение) при числе степеней свободы $f = n - 2$ и уровню значимости α = 0,05.

4. По найденным значениям z_1 и z_2 в табл.XI (см.приложение) находим соответствующие значения r_1 и r_2. Это и будет 95%-ный доверительный интервал для генерального коэффициента корреляции R, т.е.

$$r_1 < R < r_2.$$

Пример 24. Нахождение доверительных границ коэффициента корреляции из примера 22 приводится на основании изложенного выше в следующем порядке.

1. Для коэффициента корреляции r = 0,98889 по табл. XI (см.приложение) находим z = 2,59.

2. Вычисляем стандартную ошибку $\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{10-3}} = 0,377.$

3. По табл. УШ (см.приложение) для $f = 8$ и $\alpha = 0{,}05$ находим величину $t = 2{,}3I$. Далее вычисляем величины

$$z_1 = 2{,}59 - 2{,}3I \cdot 0{,}337 = 1{,}72,$$

$$z_2 = 2{,}59 + 2{,}3I \cdot 0{,}377 = 3{,}46.$$

4. По табл.XI (см.приложение) для z_1 и z_2 находим соответствующие значения r_1 и r_2 $z_1 = I{,}72$, $r_1 = 0{,}938$, $z_2 = 3{,}46$, $r_2 = I$. Поэтому истинный коэффициент корреляции с вероятностью равной 0,95 заключен в пределах $0{,}938 < R < I$.

ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ЗОНА РЕГРЕССИИ

Выборочное значение коэффициента регрессии $b_{y/x}$ является оценкой соответствующего генерального коэффициента $\beta_{y/x}$. Это означает, что по экспериментальным данным невозможно определить истинную линию регрессии. Поэтому необходимо построить доверительную зону, в которой она заключена с определенной степенью уверенности. Это выполняется следующим образом.

Пример 25. Найдем доверительную зону линии регрессии из примера 22. Сначала находим величину Σ_{yy} для примера 22 $\Sigma_{yy} = I67{,}0792$, затем вычисляем

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{(1-r^2)\Sigma_{yy}}{n(n-2)}} = \sqrt{\frac{(1-0{,}9889^2)\,167{,}0792}{10\cdot 8}} = 0{,}2148.$$

Далее для каждого x_i вычисляем величину стандартного отклонения

$$s = s_{y/x}\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{s_x}+1+n}.$$

Если выбрать $\alpha = 0{,}05$, то для $f = n-2 = 7$ степеней свободы (см.приложение, табл.УШ) $t_{05} = 2{,}3I$. Ширину доверительной зоны линии регрессии определяем величиной $st_{05} = s_{05}$, отложенной по вертикали в обе стороны от соответствующих точек, лежащих на линии регрессии:

$$s_{05} = 2{,}31\cdot 0{,}215\sqrt{\frac{(x_i-3{,}86)^2}{2{,}296}+1+10}.$$

$$[S_{05}]_{x_i=0,5}=0,497\sqrt{\frac{(0,5-3,86)^2}{2,296}+11}=1,98;\ [S_{05}]_{x_i=1,17}=1,87;$$

$$[S_{05}]_{x_i=1,83}=1,78;\ [S_{05}]_{x_i=2,33}=1,72;\ [S_{05}]_{x_i=3,17}=1,66;$$

$$[S_{05}]_{x_i=4,33}=1,66;\ [S_{05}]_{x_i=5,17}=1,7;\ [S_{05}]_{x_i=5,9}=1,79;$$

$$[S_{05}]_{x_i=6,67}=1,89;\ [S_{05}]_{x_i=7,5}=2,04.$$

Таким образом, истинная линия регрессии заключена в области, изображенной на рис.3.

СРАВНЕНИЕ ДВУХ ВЫБОРОЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ

Если требуется сравнить два коэффициента корреляции r_1 и r_2, полученных для выборок объемами n_1 и n_2 соответственно, то поступаем следующим образом.

I. Находим r_1 и r_2.

2. По табл.XI (см.приложение) находим соответствующие им z_1 и z_2

3 .Вычисляем стандартную ошибку величины z_1-z_2:

$$\sigma_{z_1-z_2}=\sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}.$$

4. Находим величину

$$t_{z_1-z_2}=\frac{|z_1-z_2|}{\sigma_{z_1-z_2}}.$$

Если $t_{z_1-z_2}>t_{05}$ (см.приложение, табл.УШ), то отличие коэффициентов корреляции r_1 и r_2 существенно, а если $t_{z_1-z_2}<t_{05}$, то отличие коэффициентов корреляции не существенно.

Пример 26. Необходимо сравнить два коэффициента корреляции:

$$r_1 = 0{,}5, \qquad n_1 = 10,$$
$$r_2 = 0{,}6, \qquad n_2 = 15.$$

Требуется проверить гипотезу $r_1 = r_2$. В табл.XI (см.приложение) найдем, что $r = 0{,}5$ соответствует $z_1 = 0{,}549$, а $r_2 = 0{,}6$ – $z = 0{,}693$.

Вычисляем стандартную ошибку величины

$$\sigma_{z_1 - z_2} = \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{12}} = \sqrt{0{,}2261} = 0{,}48;$$

$$t_{z_1 - z_2} = \frac{|0{,}549 - 0{,}693|}{0{,}48} = \frac{0{,}144}{0{,}48} = 0{,}3.$$

В табл.УШ (см.приложение) для $f = n_1 + n_2 - 2 = 23$ и $\alpha = 0{,}05$ находим $t_{05} = 2{,}07$. Поскольку $t_{z_1 - z_2} = 0{,}3 < t_{05} = 2{,}07$, то отличие не существенно, т.е. гипотеза принимается.

СРАВНЕНИЕ ДВУХ ЛИНИЙ РЕГРЕССИИ

Пусть уравнения сравниваемых линий регрессии будут следующими:

$$y_{x(1)} - \bar{y}_{(1)} = b_{(1)}\left(x - \bar{x}_{(1)}\right),$$
$$y_{x(2)} - \bar{y}_{(2)} = b_{(2)}\left(x - \bar{x}_{(2)}\right).$$

Сначала следует проверить предположение, что дисперсии линий регрессии s_1 и s_2 значимо не отличаются:

$$s_1^2 = (1 - r_1^2)\,\Sigma_{yy(1)}/(n_1 - 2),$$
$$s_2^2 = (1 - r_2^2)\,\Sigma_{yy(2)}/(n_2 - 2).$$

Это сравнение проводим по критерию Фишера. Если отличия нет, то приступаем к сравнению коэффициентов регрессии b_1 и b_2 по критерию Стьюдента:

$$t = \frac{|b_{(1)} - b_{(2)}|}{S_{b_{(1)} - b_{(2)}}}.$$

Здесь

$$S^2_{b_{(1)} - b_{(2)}} = S^2_{b_{(1)}} + S^2_{b_{(2)}} = S^2\left(\frac{1}{\Sigma_{xx(1)}} + \frac{1}{\Sigma_{xx(2)}}\right),$$

а

$$S^2 = \frac{(n_{(1)} - 2) S^2_{(1)} + (n_{(2)} - 2) S^2_{(2)}}{n_{(1)} + n_{(2)} - 4}.$$

Значение t сравниваем с t_α для степеней свободы $f = n_{(1)} + n_{(2)} - 4$. Если $t > t_\alpha$, то коэффициенты регрессии статистические достоверно отличаются, если $t < t_\alpha$, то отличие незначительно.

НАХОЖДЕНИЕ ОБЪЕДИНЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Если величина t незначительна, то обе линии регрессии можно считать параллельными, и общая оценка для углового коэффициента β будет следующей:

$$b = \frac{\Sigma_{xx(1)} b_{(1)} + \Sigma_{xx(2)} b_{(2)}}{\Sigma_{xx(1)} + \Sigma_{xx(2)}}.$$

Оценка дисперсии этой величины

$$S^2_b = \frac{S^2}{\Sigma_{xx(1)} + \Sigma_{xx(2)}},$$

где S - общая оценка дисперсий двух линий регрессии.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В практике биологических исследований часто возникает необходимость изучить зависимость двух величин, одна из которых y является варьирующей при определенных значениях другой x.

Задача состоит в том, чтобы, имея некоторый эмпирический ряд точек $\{xy\}$, выявить ту основную тенденцию, которая характеризует этот ряд. Для упрощения решения накладываются такие требования: а) величина x не варьирует, а принимает определенные заданные значения; б) каждому значению x соответствует лишь одно значение y, которое может быть средней величиной; при этом количество y для каждого x должно быть одинаково с тем, чтобы все эмпирические точки имели одинаковый вес.

Метод наименьших квадратов применяется преимущественно тогда, когда заранее известно аналитическое выражение изучаемой зависимости. При этом целью исследования является определение численных параметров этой зависимости. Например, при изучении радиоактивного распада образцов заранее известно, что уменьшение активности происходит по экспоненциальному закону.

Сущность метода наименьших квадратов состоит в следующем. Правильными будут считаться такие значения параметров уравнения, при которых сумма квадратов отклонений эмпирических значений y от расчетных $\tilde{y}$ окажется наименьшей.

Пусть предполагаемая зависимость между x и y является линейной, т.е. имеет вид

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x.$$

Составляем систему нормальных уравнений

$$a_0 n + a_1 \Sigma x_i = \Sigma y_i,$$
$$a_0 \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_i^2 = \Sigma x_i y_i.$$

Здесь a_0 и a_1 - неизвестные параметры; n - количество точек.

Значение $\Sigma x_i, \Sigma y_i, \Sigma x_i^2, \Sigma x_i y_i$ берем из рассчитанной заранее таблицы. Из этой системы находим

$$a_1 = \frac{\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i/n}{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n}, \qquad a_0 = \frac{(\Sigma y_i - a_1 \Sigma x_i)}{n},$$

где a_0 - отрезок оси ординат, отсекаемый прямой от начала координат; a_1 - тангенс угла наклона изучаемой прямой с осью абсцисс.

Если предполагаемая зависимость между y и x квадратична, т.е.

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

то система нормальных уравнений имеет вид

$$a_0 n + a_1 \Sigma x_i + a_2 \Sigma x_i^2 = \Sigma y_i,$$

$$a_0 \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_1^2 + a_2 \Sigma x_i^3 = \Sigma x_i y_i,$$

$$a_0 \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_i^3 + \Sigma x_i^4 a_2 = \Sigma x_i^2 y_i.$$

Формулы для a_0, a_1, a_2 получаются менее громоздкими, если зависимость изобразить несколько иначе:

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 (x - \bar{x}) + b_2 [(x - \bar{x})^2 - \gamma],$$

где $\quad \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}, \quad \gamma = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n}.$

Тогда

$$b = \bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}; \quad b_1 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x}) y_i}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}; \quad b_2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 y_i - n\gamma \bar{y}}{\Sigma (x_i - \bar{x})^4 - n\gamma^2}.$$

ВЫБОР СТЕПЕНИ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА

Часто вид уравнения неизвестен, и выравнивание при помощи полинома имеет целью получение достаточно хорошей интерполяционной формулы. При этом возникает вопрос о том, какова должна быть наивысшая степень аргумента в полиноме. Этот вопрос решается следующим способом.

Пусть имеется ряд точек

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ldots$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6,\ y_7,\ y_8,\ldots$$

Находим разности соседних значений

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1;\ \Delta y_2 = y_3 - y_2;\ \Delta y_3 = y_4 - y_3 \text{ и т.д.}$$

Если Δy_i равны между собой, то степень полинома будет равна 1, т.е. зависимость линейна. Если же Δy_i не равны между собой, то находим

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\quad \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2,$$

$$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3,\quad \Delta^2 y_4 = \Delta y_5 - \Delta y_4 \text{ и т.д.}$$

Если $\Delta^2 y_i$ окажутся равными, то зависимость квадратична. В противном случае находим

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1;\ \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2;\ \Delta^3 y_3 = \Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3 \text{ и т.д.}$$

МЕТОД СКОЛЬЗЯЩЕЙ СРЕДНЕЙ

Поскольку решение системы нормальных уравнений для полинома третьей степени имеет громоздкий вид и требует много вычислений, то для выравнивания ряда полиномом третьей степени рекомендуется пользоваться только в том случае, если имеются теоретические предположения о виде изучаемой зависимости. Если таковых нет и степень полинома велика, то гораздо удобней ограничить задачу выравнивания только исключением влияния случайных вариаций. Это достигается способом скользящего среднего. Суть этого метода состоит в следующем.

Пусть имеется ряд точек

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ldots$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, \ldots$$

Находим величины

$$\tilde{x}_2 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad \tilde{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}, \qquad \tilde{y}_3 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3},$$

$$\tilde{x}_4 = \frac{x_3 + x_4 + x_5}{3}, \qquad \tilde{y}_4 = \frac{y_3 + y_4 + y_5}{3} \text{ и т.д.}$$

и наносим их на график. Процедура упрощается, если x_i будут равностоящими, так как тогда надо только находить $\tilde{y}_i$, поскольку $\tilde{x}_i = \bar{x}_i$. Этот способ непригоден для нахождения выравненных x_1 и x_{n-1}. Их величины получаются экстраполяцией того отрезка кривой, который получился между x_2, x_3 и x_{n-2}, x_{n-3}. Для этого необходимо найти прямую линию регрессии по трем первым точкам $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$, $\{x_3, y_3\}$ и продолжить до пересечения с $x_0=0$. Получим y_0 – некоторое приближенное условное значение, которое можно использовать для нахождения $\tilde{y}_1$, т.е. $\tilde{y}_1 = (y_0 + y_1 + y_2)/3$. и т.д.

При выравнивании можно пользоваться любым нечетным числом точек (иначе не будет выполняться $\tilde{x}_i = x_i$), например пятью:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}, \qquad y_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5}.$$

Если кривизна ожидаемой кривой велика, то усреднение должно производиться по малому числу точек (n = 3). Если же эмпирический ряд имеет малую кривизну и сильные флуктуации, то усреднение следует производить по семи-девяти точкам.

БЛОК-СХЕМА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Коротко резюмируя изложенное, можно сделать следующие выводы.

Начальный этап применения статистических методов к обработке экспериментальных данных состоит в выборе фактора (или нескольких факторов), по которому ведутся наблюдения. Далее в зависимости от поставленной задачи составляется подробная схема статистического анализа (рис.4), включая определение числа повторностей в опыте, необходимого для достижения определенной степени уверенности в получаемых данных. Переход от блока к блоку возможен только в случае, если выполнены условия предыдущих блоков, так как эти последовательные переходы предусматривают ограничения применимости статистических критериев.

В схеме приняты следующие обозначения: m - число выборок; "да" означает выполнение нулевой гипотезы H ; найденные параметры достоверно не отличаются друг от друга, т.е. являются оценкой одной и той же величины; "нет" означает невыполнение нулевой гипотезы.

БЛОК 1. Выборку необходимо составить так, чтобы она наиболее полно отражала свойства генеральной совокупности. Это достигается или с помощью таблицы случайных чисел (случайный отбор) (Хальд, 1956, стр.419-420; Митропольский, 1961, стр.16-18), или же отбором наблюдений по заранее установленной схеме. Такими схемами являются: 1)расслоенный случайный выбор; 2)систематический выбор со случайным началом; 3) двухступенчатый выбор (Хальд, 1956, стр.420-425).

БЛОК 2. Объем выборки находится или из ширины доверительного интервала (Урбах, 1964), стр.113-115; Налимов ,1960; Хальд, 1956, стр.204-205), или из мощности F-критерия однофакторного дисперсионного анализа (Шеффе, 1963, стр.96-100) и мощности u-критерия значимости (Хальд, 1956, стр.204-206).

БЛОК 3. Случайный выбор элементов из генеральной совокуп-

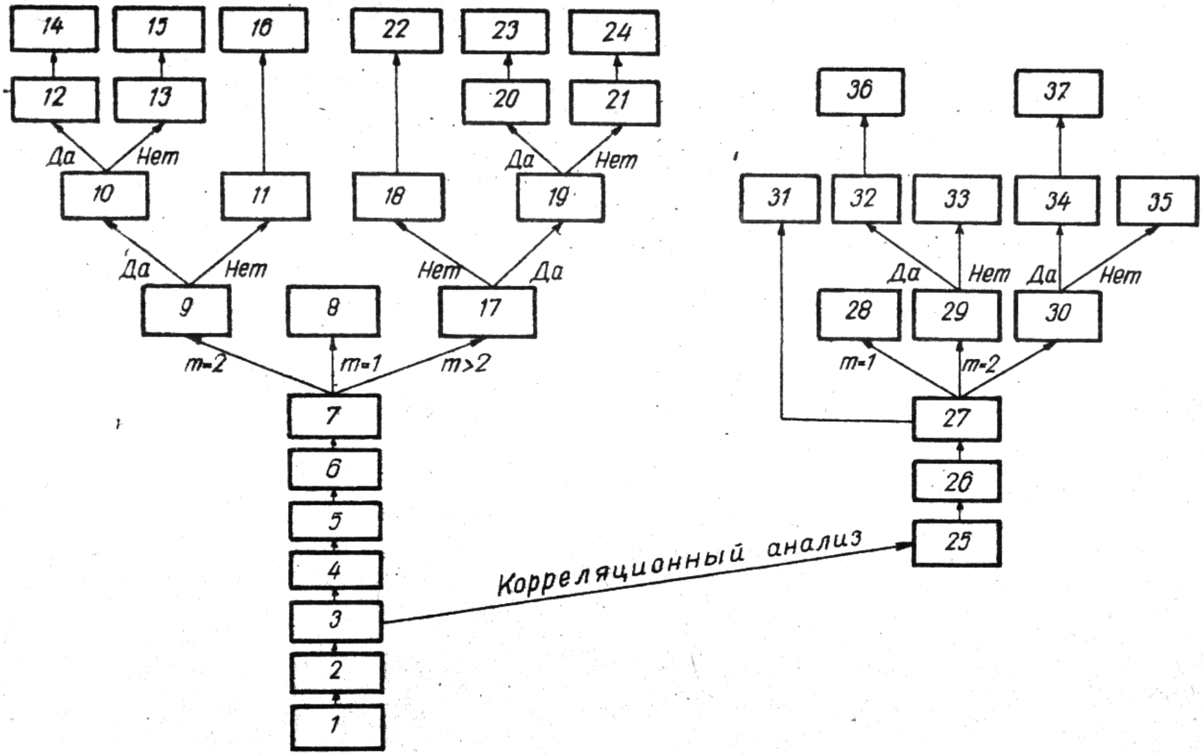


Рис.4. Алгоритм статистической обработки.

ности должен дополняться детальным исследованием того, коррелируют ли изучаемые признаки или же изменяются случайным образом независимо друг от друга. Это решается следующими методами: 1) восходящих и нисходящих серий; 2) серий, расположенных справа и слева от медианы (Хальд, 1956, стр.294-307).

БЛОК 4. Вычисление среднего значения $\bar{x}$ и оценки дисперсии выборки s^2.

БЛОК 5. Проверка принадлежности данной выборке резко выделяющихся вариант. Для выборок большого объема это делается методом квантилей (Хальд, 1956, стр.287-290; Линник,1958), а для малых выборок ($n \leq 10$) дисперсия заменяется размахом (Урбах, 1964, стр.141-142).

БЛОК 6. Если проверяемая варианта принадлежит данной выборке, то по мере необходимости вычисляют параметры выборки ($\bar{x}$, s, v - коэффициенты вариации; E - коэффициент эксцесса; A -коэффициент асимметрии) и их ошибки (Урбах,1964, стр.45, 108). Если же резко выделяющаяся варианта не принадлежит выборке, то она отбрасывается, и находятся перечисленные выше параметры и их ошибки, исходя из выборки объемом на единицу меньше. Такая проверка проводится для всех резко выделяющихся величин.

БЛОК 7. Нахождение закона распределения генеральной совокупности, в данной схеме - проверка нормальности распределения. Это может быть выяснено такими методами: 1) спрямления нормальной кривой (Хальд, 1956; Урбах, 1964, стр.78-79); 2) основанными на свойствах нормальной кривой (Урбах,1964, стр.142-145; Митропольский, 1961, стр.192-194), а именно:$A=0$, $E=0$; 3)"χи-квадрат"(Урбах, 1964, стр.218-224).

БЛОК 8. Если количество выборок $m = 1$, то находятся доверительные интервалы параметров выборки $\bar{x}$ и s (Урбах, 1964, стр.108-112; Хальд, 1956, стр.248-249).

БЛОК 9. Сравнение двух выборок необходимо начинать со сравнения дисперсий s_1^2 и s_2^2 методом Фишера (Урбах, 1964, стр.163-195; Хальд, 1956, стр.337-340).

БЛОК 10. Если выполняется нулевая гипотеза, т.е. две дисперсии значимо не отличаются, то переходят к сравнению средних значений t-критерием Стьюдента (Митропольский,1961, стр.258-260; Урбах,1964, стр.148-151).

БЛОК 11. Если дисперсии отличаются значимо, то средние значения сравниваются приближенным t-критерием (Янко,1961, стр.32-33).

БЛОК 12. Если средние значимо не отличаются, то необходимо найти объединенные значения параметров выборки $\bar{x}$ и s (Урбах, 1964, стр.115-119).

БЛОК 13. При статистически значимом отличии средних значений находится только объединенная оценка дисперсии..

БЛОК 14. Нахождение доверительных интервалов параметров $\bar{x}$ и s.

БЛОК 15. Нахождение доверительных интервалов для среднего значения каждой выборки на основании объединенной дисперсии.

БЛОК 16. Нахождение доверительных интервалов для среднего значения каждой выборки на основании соответствующей дисперсии.

БЛОК 17. Если число выборок больше двух $(m>2)$, то сравнение дисперсий производится методом Бартлетта (Хальд, 1956, стр.252-259).

БЛОК 18. В случае, когда дисперсии отличаются значимо, то средние значения можно сравнивать однофакторным дисперсионным анализом только при условии, что выборки имеют одинаковые объемы.

БЛОК 19. Если дисперсии значимо не отличаются, то сравнивают средние значения однофакторным дисперсионным анализом (Хальд, 1956, стр.360-372; Урбах, 1964, стр.175-182).

БЛОК 20. Если средние значения достоверно не отличаются, необходимо найти объединенные значения $\bar{x}$ и s.

БЛОК 21. Если средние значения значимо отличаются, то находится только объединенная оценка стандартного отклонения.

БЛОК 22. Вычисление доверительных интервалов для каждого среднего на основании соответствующей дисперсии.

БЛОК 23. Нахождение доверительных интервалов для среднего значения $\bar{x}$ и стандартного отклонения s объединенной выборки.

БЛОК 24. Нахождение доверительных интервалов для средних значений каждой выборки на основании объединенной оценки дисперсии.

БЛОК 25. Если изучаемые признаки изменяются не случайным образом по отношению друг к другу, то необходимо вычислить коэффициент корреляции и затем коэффициент регрессии (Митропольский, 1961, стр.317-319; Урбах, 1964, стр.282-285, 288).

БЛОК 26. Проверка значимости регрессии, т.е. существует ли корреляционная связь между признаками (Урбах, 1964, стр.303).

БЛОК 27. Проверка линейности линии регрессии (Урбах,1964, стр.295-299; Митропольский, 1961, стр.320).

БЛОК 28. Нахождение доверительных интервалов коэффициента корреляции (урбах, 1964, стр.291-294).

БЛОК 29. Сравнение двух коэффициентов корреляции t-критерием Стьюдента (Урбах, 1964, стр.310).

БЛОК 30. Сравнение двух линий регрессии (Урбах,1964, стр.310-316).

БЛОК 31. Нахождение доверительной зоны линии регрессии (Урбах, 1964, стр.300-305).

БЛОК 32. Если коэффициенты корреляции значимо не отличаются, то необходимо найти объединенную оценку коэффициента корреляции (Урбах, 1964, стр.311).

БЛОК 33. Если коэффициенты корреляции значимо отличаются, необходимо найти доверительные интервалы для каждого коэффициента корреляции.

БЛОК 34. Если две линии регрессии значимо не отличаются, то проводится их объединение.

БЛОК 35. Если две линии регрессии значимо отличаются,то находятся доверительные зоны каждой из них.

БЛОК 36. Вычисление доверительного интервала объединенного коэффициента корреляции.

БЛОК 37. Вычисление доверительной зоны объединенной регрессии.

Для облегчения вычислительных работ, соответствующих блокам 4-8 включительно, варианты выборки x_i записываются в 1-ю

n_i	x_i	$\bar{x}=\Sigma_1:n$	$x_i-\bar{x}=$ $=1-2$	3^{2}	$3\cdot4$	4^{2}	$n-1$	$\Sigma_3:7$	$s=\sqrt{8}$	$8\cdot9$	8^{2}	$/x_{max}-2/$	$/x_{min}-2/$	$12:9$	$13:9$	$\Sigma_4:n$	$\rho_3:s^{3}$ $=16:10$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
⋮																	
n																	
Σ_1			Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5											

$\Sigma_5:n$	$\rho_4:s^{4}$ $18:11$	$v=9:2$	$\sqrt{n}$	$O_{\bar{x}}=9:21$	$2\cdot n$	$\sqrt{23}$	$O_s=9:24$	$n\cdot7$	$\sqrt{26}$	$n-2$	$27:28$	$A=29\cdot17$	$n+1$	$31\cdot7$
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

$n-3$	$33\cdot28$	$32\cdot34$	$6:31$	$19+36-3$	$E=35\cdot37$	$n+3$	$6:39$	$O_A=\sqrt{40}$	$n+5$	$24:42$	$O_E=\sqrt{43}$	$\Sigma_2:n$	$c=45:9$	
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	

Рис.5.Бланк для реализации блоков 4–8 схемы статистической обработки.

колонку бланка[x] (см.рис.5). Во 2-й колонке заполняется только одна ячейка - среднее значение $\bar{x}$. В 3-й колонке записываются разности каждого x_i и среднего значения. В 12-й и 13-й колонках записываются разности между максимальным и минимальным значениями соответственно среди x_i и средним значением $\bar{x}$, взятом из 2-й колонки. Если содержимое 14-й и 15-й колонок больше τ_{05} (см.блок 5), то x_{max} (x_{min}) вычеркивается из 1-й колонки и вычисляется все заново с объемом, меньшим на единицу. 4-6-я колонки вычисляются после заполнения 15-й колонки. Внизу записываются суммы по столбцам. Например, $\Sigma_1 = \sum\limits_i^n x_i$, причем $\Sigma_2 = |x_i - \bar{x}|$, так как вычисляется без учета знака. Смысл остальных колонок не вызывает сомнений. После заполнения всего бланка можно составить таблицу параметров и их основных ошибок.

№ ячейки	Содержимое ячейки
2	Среднее значение $\bar{x}$
22	Ошибка среднего значения $O_{\bar{x}}$
9	Стандартное отклонение s
25	Ошибка стандартного отклонения O_s
16	Третий центральный момент ρ_3
18	Четвертый центральный момент
17	Величина $\rho_3 : s^3$
19	Величина $\rho_4 : s^4$
20	Коэффициент вариации v
30	Коэффициент асимметрии A
41	Ошибка коэффициента асимметрии O_A
38	Коэффициент эксцесса E
44	Ошибка коэффициента эксцесса O_E
46	Величина c для проверки нормальности распределения

x) В кружки заключены цифры в отличие от номеров ячеек.

ЛИТЕРАТУРА

I. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958.

2. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М., Физматгиз, 1961.

3. Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества. М., Физматгиз, 1960.

4. Урбах В.Ю. Биометрические методы. М., "Наука", 1964.

5. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. М., ИЛ, 1956.

6. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М., Физматгиз, 1963.

7. Янко Я. Математико-статистические таблицы. М., Госстатиздат, 1961.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

I. Таблицы

2. Диаграммы

Случайные числа Таблица I

5489	5583	3I56	0835	I988	39I2	0938	7460	0869	4420
3522	0935	7877	5665	7020	9555	7379	7I24	7878	5544
7555	7579	2550	2487	9477	0864	2349	I0I2	8250	2633
5759	3554	5080	9074	700I	6249	3224	6368	9I02	2672
6303	6895	337I	3I96	723I	29I8	7380	0438	7547	2644
735I	5634	5323	2623	7803	8374	2I9I	0464	0696	9529
7068	7803	8832	5II9	6350	0I20	5026	3684	5657	0304
36I3	I428	I796	8447	0503	5654	3254	7336	9536	I944
5I48	4534	2I05	0368	7890	2473	4240	8652	9435	I422
98I5	5I44	7649	8638	6I37	8070	5345	4865	2456	5708
5780	I277	63I6	I0I3	2867	9938	3930	3203	5696	I769
II87	095I	599I	5245	5700	5564	7352	089I	6249	6568
4I84	2I79	4554	9088	2254	2435	2965	5I54	I209	7069
29I6	2972	9885	0275	0I44	8034	8I22	32I3	7666	0230
5524	I34I	9860	6565	698I	9842	0I7I	2284	2707	3008
0I46	529I	2354	5694	0377	5336	6460	9585	34I5	2358
4920	2826	5238	5402	7937	I993	4332	2327	6875	5230
7978	I947	6380	3425	7267	7285	II30	7722	0I64	8573
7453	0653	3645	7497	5969	8682	4I9I	2976	036I	9334
I473	6938	4899	5348	I64I	3652	0852	5296	4538	4456
8I62	8797	8000	4707	I880	9660	8446	I883	9768	088I
5645	42I9	0807	330I	4279	4I68	4305	9937	3I20	5547
2042	II92	II75	885I	6432	4635	5757	6656	I660	5389
5470	7702	6958	9080	5925	85I9	0I27	9233	2452	734I
4045	I730	6005	I704	0345	3275	4738	4862	2556	8333
5880	I257	6I63	4439	7276	6353	69I2	073I	9033	5294
9083	4260	5277	4998	4298	5204	3965	4028	8936	5I48
I762	87I3	II89	I090	8989	7273	32I3	I935	932I	4820
2023	2589	I740	0424	8924	0005	I969	I636	7237	I227
7965	3855	4765	0703	I678	084I	7543	0308	9732	I289

Продолжение табл.I

7690	0480	8098	9629	48I9	72I9	724I	5I28	3853	I92I
9292	0426	9573	4903	59I6	6576	8368	3270	664I	0033
0867	I656	70I6	4220	2533	6345	8227	I904	5I38	2537
0505	2I27	8255	5276	2233	3956	4II8	8I99	6380	6340
6295	9795	III2	576I	2575	6837	3336	9232	7403	8345
6323	26I5	34I0	3365	III7	24I7	3I76	2434	5240	5455
8672	8536	2966	5773	54I2	8II4	0930	4697	69I9	4569
I422	5507	7596	0670	30I3	I35I	3886	3268	9469	2584
2653	I472	5II3	5735	I469	9545	933I	5303	99I4	6394
0438	4376	3328	8649	8327	0II0	4549	7955	5275	2890
285I	2I57	0047	7085	II29	0460	682I	8323	2572	8962
7962	2753	3077	87I8	74I8	8004	I425	3706	8822	I494
3837	4098	0220	I2I7	4732	0I50	I637	I097	I040	7372
8542	4I26	9274	225I	0607	430I	8730	7690	6235	3477
0I39	0765	8039	9484	2577	7859	I976	0623	I4I8	6685
6687	I943	4307	0579	8I7I	8224	864I	7034	3595	3875
6242	5582	5872	3I97	49I9	2792	599I	4058	9769	I9I8
6859	9606	0522	4993	0345	8958	I289	8825	694I	7685
6590	I932	6043	3623	I973	4II2	I795	8465	2II0	8045
3482	0478	022I	6738	7323	5643	4767	0I06	2272	9862

Таблица II

КРАТКАЯ ТАБЛИЦА ДОСТАТОЧНО БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

ε	P					
	0,85	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
0,05	207	270	384	663	787	1082
0,04	323	422	600	1036	1231	1691
0,03	575	751	1067	1843	2188	3007
0,02	1295	1691	2400	4146	4924	6767
0,01	5180	6764	9603	16587	19699	27069

Т а б л и ц а III

ОРДИНАТЫ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

u	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,I	3970	3965	396I	3956	395I	3945	3939	3932	3925	39I8
0,2	39I0	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	38I4	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	37I2	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	362I	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	352I	3503	3485	3467	3448	3429	34I0	339I	3372	3352
0,6	3332	33I2	3292	327I	325I	3230	3209	3I87	3I66	3I44
0,7	3I23	3I0I	3079	3056	3034	30II	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	266I	2637	26I3	2589	2565	254I	25I6	2492	2468	2444
I,0	0,2420	2396	237I	2347	2323	2299	2275	225I	2227	2203
I,I	2I79	2I55	2I3I	2I07	2083	2059	2036	20I2	I989	I965
I,2	I942	I9I9	I895	I872	I849	I826	I804	I78I	I758	I736
I,3	I7I4	I69I	I669	I647	I626	I604	I582	I56I	I539	I5I8
I,4	I497	I476	I456	I435	I4I5	I394	I374	I354	I334	I3I5
I,5	I295	I276	I257	I238	I2I9	I200	II82	II63	II45	II27
I,6	II09	I092	I074	I057	I040	I023	I006	0989	0973	0957
I,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	08I8	0804
I,8	0790	0775	076I	0748	0734	072I	0707	0694	068I	0669
I,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	055I
2,0	0,0540	0529	05I9	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,I	0440	043I	0422	04I3	0404	0396	0387	0379	037I	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	03I7	03I0	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	024I	0235	0229
2,4	0224	02I9	02I3	0208	0203	0I98	0I94	0I89	0I84	0I80
2,5	0I75	0I7I	0I67	0I63	0I58	0I54	0I5I	0I47	0I43	0I39
2,6	0I36	0I32	0I29	0I26	0I22	0II9	0II6	0II3	0II0	0I07
2,7	0I04	0I0I	0099	0096	0093	009I	0088	0086	0084	008I
2,8	0079	0077	0075	0073	007I	0069	0067	0065	0063	006I
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	005I	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,I	0033	0032	003I	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	002I	0020	0020	00I9	00I8	00I8
3,3	00I7	00I7	00I6	00I6	00I5	00I5	00I4	00I4	00I3	00I3
3,4	00I2	00I2	00I2	00II	00II	00I0	00I0	00I0	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	000I	000I

Таблица IУ

ЗНАЧЕНИЯ $\Psi(\rho)$- И (Φ) – ФУНКЦИИ, ОБРАТНОЙ К ИНТЕГРАЛУ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ρ	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	$-\infty$	-3,09	-2,88	-2,75	-2,65	-2,58	-2,5I	-2,46	-2,4I	-2,37
0,0I	-2,33	-2,29	-2,26	-2,23	-2,20	-2,I7	-2,I4	-2,I2	-2,I0	-2,07
0,02	-2,05	-2,03	-2,0I	-2,00	-I,98	-I,96	-I,94	-I,93	-I,9I	-I,90
0,03	-I,88	-I,87	-I,85	-I,84	-I,83	-I,8I	-I,80	-I,79	-I,77	-I,76
0,04	-I,75	-I,74	-I,73	-I,72	-I,7I	-I,70	-I,68	-I,67	-I,66	-I,65
0,05	-I,64	-I,64	-I,63	-I,62	-I,6I	-I,60	-I,59	-I,58	-I,57	-I,56
0,06	-I,55	-I,55	-I,54	-I,53	-I,52	-I,5I	-I,5I	-I,50	-I,49	-I,48
0,07	-I,48	-I,47	-I,46	-I,45	-I,45	-I,44	-I,43	-I,43	-I,42	-I,4I
0,08	-I,4I	-I,40	-I,39	-I,39	-I,38	-I,37	-I,37	-I,36	-I,35	-I,35
0,09	-I,34	-I,33	-I,33	-I,32	-I,32	-I,3I	-I,30	-I,30	-I,29	-I,29
0,I0	-I,28	-I,28	-I,27	-I,26	-I,26	-I,25	-I,25	-I,24	-I,24	-I,23
0,II	-I,23	-I,22	-I,22	-I,2I	-I,2I	-I,20	-I,20	-I,I9	-I,I9	-I,I8
0,I2	-I,I8	-I,I7	-I,I7	-I,I6	-I,I6	-I,I5	-I,I5	-I,I4	-I,I4	-I,I3
0,I3	-I,I3	-I,I2	-I,I2	-I,II	-I,II	-I,I0	-I,I0	-I,09	-I,09	-I,09
0,I4	-I,08	-I,08	-I,07	-I,07	-I,06	-I,06	-I,05	-I,05	-I,05	-I,04
0,I5	-I,04	-I,03	-I,03	-I,02	-I,02	-I,02	-I,0I	-I,0I	-I,00	-I,00
0,I6	-0,99	-0,99	-0,99	-0,98	-0,98	-0,97	-0,97	-0,97	-0,96	-0,96
0,I7	-0,95	-0,95	-0,95	-0,94	-0,94	-0,93	-0,93	-0,93	-0,92	-0,92
0,I8	-0,92	-0,9I	-0,9I	-0,90	-0,90	-0,90	-0,89	-0,89	-0,89	-0,88
0,I9	-0,88	-0,87	-0,87	-0,87	-0,86	-0,86	-0,86	-0,85	-0,85	-0,85
0,20	-0,84	-0,84	-0,83	-0,83	-0,83	-0,82	-0,82	-0,82	-0,8I	-0,8I
0,2I	-0,8I	-0,80	-0,80	-0,80	-0,79	-0,79	-0,79	-0,78	-0,78	-0,78
0,22	-0,77	-0,77	-0,77	-0,76	-0,76	-0,76	-0,75	-0,75	-0,75	-0,74
0,23	-0,74	-0,74	-0,73	-0,73	-0,73	-0,72	-0,72	-0,72	-0,7I	-0,7I
0,24	-0,7I	-0,70	-0,70	-0,70	-0,69	-0,69	-0,69	-0,68	-0,68	-0,68

Продолжение табл.IУ

P	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
0,25	-0,67	-0,67	-0,67	-0,67	-0,66	-0,66	-0,66	-0,65	-0,65	-0,65
0,26	-0,64	-0,64	-0,64	-0,63	-0,63	-0,63	-0,63	-0,62	-0,62	-0,62
0,27	-0,6I	-0,6I	-0,6I	-0,60	-0,60	-0,60	-0,59	-0,59	-0,59	-0,59
0,28	-0,58	-0,58	-0,58	-0,57	-0,57	-0,57	-0,57	-0,56	-0,56	-0,56
0,29	-0,55	-0,55	-0,55	-0,54	-0,54	-0,54	-0,54	-0,53	-0,53	-0,53
0,30	-0,52	-0,52	-0,52	-0,52	-0,5I	-0,5I	-0,5I	-0,50	-0,50	-0,50
0,3I	-0,50	-0,49	-0,49	-0,49	-0,48	-0,48	-0,48	-0,48	-0,47	-0,47
0,32	-0,47	-0,46	-0,46	-0,46	-0,46	-0,45	-0,45	-0,45	-0,45	-0,44
0,33	-0,44	-0,44	-0,43	-0,43	-0,43	-0,43	-0,42	-0,42	-0,42	-0,42
0,34	-0,4I	-0,4I	-0,4I	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,39	-0,39	-0,39
0,35	-0,39	-0,38	-0,38	-0,38	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,36	-0,36
0,36	-0,36	-0,36	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,33
0,37	-0,33	-0,33	-0,33	-0,32	-0,32	-0,32	-0,32	-0,3I	-0,3I	-0,3I
0,38	-0,3I	-0,30	-0,30	-0,30	-0,30	-0,29	-0,29	-0,29	-0,28	-0,28
0,39	-0,28	-0,28	-0,27	-0,27	-0,27	-0,27	-0,26	-0,26	-0,26	-0,26
0,40	-0,25	-0,25	-0,25	-0,25	-0,24	-0,24	-0,24	-0,24	-0,23	-0,23
0,4I	-0,23	-0,23	-0,22	-0,22	-0,22	-0,2I	-0,2I	-0,2I	-0,2I	-0,20
0,42	-0,20	-0,20	-0,20	-0,I9	-0,I9	-0,I9	-0,I9	-0,I8	-0,I8	-0,I8
0,43	-0,I8	-0,I7	-0,I7	-0,I7	-0,I7	-0,I6	-0,I6	-0,I6	-0,I6	-0,I5
0,44	-0,I5	-0,I5	-0,I5	-0,I4	-0,I4	-0,I4	-0,I4	-0,I3	-0,I3	-0,I3
0,45	-0,I3	-0,I2	-0,I2	-0,I2	-0,I2	-0,II	-0,II	-0,II	-0,II	-0,I0
0,46	-0,I0	-0,I0	-0,I0	-0,09	-0,09	-0,09	-0,09	-0,08	-0,08	-0,08
0,47	-0,08	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06	-0,05
0,48	-0,05	-0,05	-0,05	-0,04	-0,04	-0,04	-0,04	-0,03	-0,03	-0,03
0,49	-0,03	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,0I	-0,0I	-0,0I	-0,0I	-0,00
0,50	-0,00	0,00	0,0I	0,0I	0,0I	0,0I	0,02	0,02	0,02	0,02
0,5I	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05

Продолжение табл.IУ

p	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
0,52	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
0,53	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,I0	0,I0
0,54	0,I0	0,I0	0,II	0,II	0,II	0,II	0,I2	0,I2	0,I2	0,I2
0,55	0,I3	0,I3	0,I3	0,I3	0,I4	0,I4	0,I4	0,I4	0,I5	0,I5
0,56	0,I5	0,I5	0,I6	0,I6	0,I6	0,I6	0,I7	0,I7	0,I7	0,I7
0,57	0,I8	0,I8	0,I8	0,I8	0,I9	0,I9	0,I9	0,I9	0,20	0,20
0,58	0,20	0,20	0,2I	0,2I	0,2I	0,2I	0,22	0,22	0,22	0,23
0,59	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25
0,60	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	0,28
0,6I	0,28	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30	0,30
0,62	0,3I	0,3I	0,3I	0,3I	0,32	0,32	0,32	0,32	0,33	0,33
0,63	0,33	0,33	0,34	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,36
0,64	0,36	0,36	0,36	0,37	0,37	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38
0,65	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,4I	0,4I
0,66	0,4I	0,42	0,42	0,42	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43	0,44
0,67	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45	0,45	0,46	0,46	0,46	0,46
0,68	0,47	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48	0,49	0,49	0,49
0,69	0,50	0,50	0,50	0,50	0,5I	0,5I	0,5I	0,52	0,52	0,52
0,70	0,52	0,53	0,53	0,53	0,54	0,54	0,54	0,54	0,55	0,55
0,7I	0,55	0,56	0,56	0,56	0,57	0,57	0,57	0,57	0,58	0,58
0,72	0,58	0,59	0,59	0,59	0,59	0,60	0,60	0,60	0,6I	0,6I
0,73	0,6I	0,62	0,62	0,62	0,63	0,63	0,63	0,63	0,64	0,64
0,74	0,64	0,65	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66	0,67	0,67	0,67
0,75	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,69	0,70	0,70	0,70
0,76	0,7I	0,7I	0,7I	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,73	0,74
0,77	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0,77	0,77
0,78	0,77	0,78	0,78	0,78	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80

Продолжение табл.IУ

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,79	0,8I	0,8I	0,8I	0,82	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83	0,84
0,80	0,84	0,85	0,85	0,85	0,86	0,86	0,86	0,87	0,87	0,87
0,8I	0,88	0,88	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90	0,90	0,9I	0,9I
0,82	0,92	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95	0,95
0,83	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
0,84	0,99	I,00	I,00	I,0I	I,0I	I,02	I,02	I,02	I,03	I,03
0,85	I,04	I,04	I,05	I,05	I,05	I,06	I,06	I,07	I,07	I,08
0,86	I,08	I,09	I,09	I,09	I,I0	I,I0	I,II	I,II	I,I2	I,I2
0,87	I,I3	I,I3	I,I4	I,I4	I,I5	I,I5	I,I6	I,I6	I,I7	I,I7
0,88	I,I8	I,I8	I,I9	I,I9	I,20	I,20	I,2I	I,2I	I,22	I,22
0,89	I,23	I,23	I,24	I,24	I,25	I,25	I,26	I,26	I,27	I,28
0,90	I,28	I,29	I,29	I,30	I,30	I,3I	I,32	I,32	I,33	I,33
0,9I	I,34	I,35	I,35	I,36	I,37	I,37	I,38	I,39	I,39	I,40
0,92	I,4I	I,4I	I,42	I,43	I,43	I,44	I,45	I,45	I,46	I,47
0,93	I,48	I,48	0,49	I,50	I,5I	I,5I	I,52	I,53	I,54	I,55
0,94	I,55	I,56	I,57	I,58	I,59	I,60	I,6I	I,62	I,63	I,64
0,95	I,64	I,65	I,66	I,67	I,68	I,70	I,7I	I,72	I,73	I,74
0,96	I,75	I,76	I,77	I,79	I,80	I,8I	I,83	I,84	I,85	I,87
0,97	I,88	I,90	I,9I	I,93	I,94	I,96	I,98	2,00	2,0I	2,03
0,98	2,05	2,07	2,I0	2,I2	2,I4	2,I7	2,20	2,23	2,26	2,29
0,99	23,3	2,37	2,4I	2,46	2,5I	2,58	2,65	2,75	2,88	3,09

Таблица У

КРИТЕРИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ НОРМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

n	A_α		c_α	
	5%	I%	5%	I%
30	66I	982	739-863	7I0-884
35	62I	92I	743-859	7I6-878
40	587	869	746-855	72I-873
45	558	825	749-852	725-869
50	533	787	752-849	729-866
60	492	723	755-844	734-859
70	459	673	758-840	739-855
80	432	63I	76I-838	743-852
90	409	596	763-835	746-848
I00	389	567	764-834	749-846
I50	32I	464	770-827	758-837
200	280	403	774-823	763-832
300	230	329	778-8I8	769-826
400	200	285	78I-8I6	773-822
500	I79	255	782-8I4	776-820
600	I63	233	784-8I2	778-8I8
700	I5I	2I5	785-8II	779-8I6
800	I42	202	786-8I0	780-8I5
900	I34	I90	787-809	78I-8I4
I000	I27	I80	787-809	782-8I3

Примечание. Нулевая гипотеза принимается, если $|\beta_3| \leq A_{05}$ и $c = |\bar{\xi}|/s$ находится в пределах, указанных в столбце c_{05}, нулевая гипотеза отвергается, если $|\beta_3| > A_{01}$ или $c = |\bar{\xi}|/s$ находится вне пределов, указанных в столбце c_{01} (Для сокращения везде опущен нуль и запятая; например 739-863 надо читать: от 0,739 до 0,863).

Таблица УI

КРИТЕРИЙ ДЛЯ ОТБРАСЫВАНИЯ КРАЙНИХ ВАРИАНТ

n	τ_α 5%	τ_α I%	n	τ_α 5%	τ_α I%	n	τ_α 5%	τ_α I%
5	I,92	I,97	2I	2,80	3,II	80	3,33	3,70
6	2,07	2,I6	22	2,82	3,I3	90	3,37	3,74
7	2,I8	2,3I	23	2,84	3,I6	I00	3,40	3,77
8	2,27	2,43	24	2,86	3,I8	I20	3,46	3,83
9	2,35	2,53	25	2,88	3,20	I50	3,53	3,90
I0	2,4I	2,62	26	2,90	3,22	200	3,6I	3,98
II	2,47	2,69	27	2,9I	3,24	300	3,73	4,09
I2	2,52	2,75	28	2,93	3,26	400	3,80	4,I7
I3	2,56	2,8I	29	2,94	3,28	500	3,87	4,24
I4	2,60	2,86	30	2,96	3,29	600	3,92	4,28
I5	2,64	2,90	35	3,02	3,36	700	3,96	4,32
I6	2,67	2,94	40	3,08	3,42	800	3,99	4,35
I7	2,70	2,98	45	3,I2	3,48	900	4,02	4,38
I8	2,73	3,02	50	3,I6	3,52	I000	4,05	4,4I
I9	2,75	3,05	60	3,22	3,58	I500	4,I4	4,50
20	2,78	3,08	70	3,28	3,64	2000	4,2I	4,56

Т а б л и ц а УII

КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ЧАСТНОГО $\tau = \dfrac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$

n	α									
	0,005	0,0I	0,02	0,05	0,I0	0,20	0,40	0,60	0,80	0,95
4	0,995	0,99I	0,98I	0,955	0,9I0	0,822	0,648	0,459	0,250	0,069
5	0,937	0,9I6	0,876	0,807	0,728	0,6I5	0,444	0,296	0,I5I	0,039
6	0,839	0,805	0,763	0,689	0,609	0,502	0,350	0,227	0,II3	0,028
7	0,782	0,740	0,689	0,6I0	0,530	0,432	0,298	0,I89	0,093	0,022
8	0,725	0,683	0,63I	0,554	0,479	0,385	0,260	0,I64	0,079	0,0I9
9	0,677	0,635	0,587	0,5I2	0,44I	0,352	0,236	0,I48	0,070	0,0I6
I0	0,639	0,597	0,55I	0,477	0,409	0,325	0,2I6	0,I34	0,063	0,0I4
II	0,606	0,566	0,52I	0,450	0,385	0,305	0,202	0,I24	0,058	0,0I3
I2	0,580	0,54I	0,498	0,428	0,367	0,289	0,I90	0,II6	0,055	0,0I2
I3	0,508	0,520	0,477	0,4I0	0,350	0,275	0,I80	0,I09	0,052	0,0I2
I4	0,539	0,502	0,460	0,395	0,336	0,264	0,I7I	0,I04	0,049	0,0II
I5	0,522	0,486	0,445	0,38I	0,323	0,253	0,I64	0,099	0,047	0,0II
I6	0,508	0,472	0,432	0,369	0,3I3	0,244	0,I58	0,095	0,045	0,0II
I7	0,495	0,460	0,420	0,359	0,303	0,236	0,I52	0,092	0,044	0,0I0
I8	0,484	0,449	0,4I0	0,349	0,295	0,229	0,I48	0,089	0,042	0,0I0
I9	0,473	0,439	0,400	0,34I	0,288	0,223	0,I43	0,087	0,04I	0,0I0
20	0,464	0,430	0,392	0,334	0,282	0,2I8	0,I39	0,084	0,040	0,0I0

Продолжение табл.УП

n	α									
	0,005	0,0I	0,02	0,05	0,I0	0,20	0,40	0,60	0,80	0,95
2I	0,455	0,42I	0,384	0,327	0,276	0,2I3	0,I36	0,082	0,039	0,009
22	0,446	0,4I4	0,377	0,320	0,270	0,208	0,I32	0,08I	0,038	0,009
23	0,439	0,407	0,37I	0,3I4	0,265	0,204	0,I30	0,079	0,037	0,009
24	0,432	0,400	0,365	0,309	0,260	0,200	0,I27	0,077	0,036	0,009
25	0,426	0,394	0,359	0,304	0,255	0,I97	0,I24	0,076	0,036	0,009
26	0,420	0,389	0,354	0,299	0,250	0,I93	0,I22	0,074	0,035	0,008
27	0,4I4	0,383	0,349	0,295	0,246	0,I90	0,I20	0,073	0,034	0,008
28	0,409	0,378	0,344	0,29I	0,243	0,I88	0,II8	0,072	0,034	0,008
29	0,404	0,374	0,340	0,287	0,239	0,I85	0,II6	0,070	0,033	0,008
30	0,399	0,369	0,336	0,283	0,236	0,I82	0,II5	0,069	0,032	0,008

Т а б л и ц а УШ

ЗНАЧЕНИЯ t ПРИ ДАННОМ ЧИСЛЕ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ f И ДАННОЙ ВЕЛИЧИНЕ ВЕРОЯТНОСТИ P

f	P												
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,I	0,05	0,02	0,0I	0,00I
I	0,I58	0,325	0,5I0	0,727	I,000	I,376	I,963	3,078	6,3I4	I2,706	3I,82I	63,657	636,6I9
2	0,I42	0,289	0,445	0,6I7	0,8I6	I,06I	I,386	I,886	2,920	4,303	6,965	9,925	3I,598
3	0,I37	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	I,250	I,638	2,353	3,I82	4,54I	5,84I	I2,94I
4	0,I34	0,27I	0,4I4	0,569	0,74I	0,94I	I,I90	I,533	2,I32	2,776	3,747	4,604	8,6I0
5	0,I32	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	I,I56	I,476	2,0I5	2,57I	3,365	4,032	6,859
6	0,I3I	0,265	0,404	0,553	0,7I8	0,906	I,I34	I,440	I,943	2,447	3,I43	3,707	5,959
7	0,I30	0,263	0,402	0,549	0,7II	0,896	I,II9	I,4I5	I,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,I30	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	I,I08	I,397	I,860	2,306	2,896	3,355	5,04I
9	0,I29	0,26I	0,398	0,543	0,703	0,883	I,I00	I,383	I,833	2,262	2,82I	3,250	4,78I
I0	0,I29	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	I,093	I,372	I,8I2	2,228	2,764	3,I69	4,587
II	0,I29	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	I,088	I,363	I,796	2,20I	2,7I8	3,I06	4,437
I2	0,I28	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	I,083	I,356	I,782	2,I79	2,68I	3,055	4,3I8
I3	0,I28	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	I,079	I,350	I,77I	2,I60	2,650	3,0I2	4,22I
I4	0,I28	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	I,076	I,345	I,76I	2,I45	2,624	2,977	4,I40
I5	0,I28	0,258	0,393	0,536	0,69I	0,866	I,074	I,34I	I,753	2,I3I	2,602	2,947	4,073
I6	0,I28	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	I,07I	I,337	I,746	2,I20	2,583	2,92I	4,0I5
I7	0,I28	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	I,069	I,333	I,740	2,II0	2,567	2,898	3,965
I8	0,I27	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	I,067	I,330	I,734	2,I0I	2,552	2,878	3,922
I9	0,I27	0,257	0,39I	0,533	0,688	0,86I	I,066	I,328	I,729	2,093	2,539	2,86I	3,883
20	0,I27	0,257	0,39I	0,533	0,687	0,860	I,064	I,325	I,725	2,086	2,528	2,845	3,850

Продолжение табл.УШ

f	ρ												
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,I	0,05	0,02	0,0I	0,00I
2I	0,I27	0,257	0,39I	0,532	0,686	0,859	I,063	I,323	I,72I	2,080	2,5I8	2,83I	3,8I9
22	0,I27	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	I,06I	I,32I	I,7I7	2,074	2,508	2,8I9	3,792
23	0,I27	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	I,060	I,3I9	I,7I4	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,I27	0,256	0,390	0,53I	0,685	0,857	I,059	I,3I8	I,7II	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,I27	0,256	0,390	0,53I	0,684	0,856	I,058	I,3I6	I,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,I27	0,256	0,390	0,53I	0,684	0,856	I,058	I,3I5	I,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,I27	0,256	0,389	0,53I	0,684	0,855	I,057	I,3I4	I,703	2,052	2,473	2,77I	3,690
28	0,I27	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	I,056	I,3I3	I,70I	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,I27	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	I,055	I,3II	I,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,I27	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	I,055	I,3I0	I,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,I26	0,255	0,388	0,529	0,68I	0,85I	I,050	I,303	I,684	2,02I	2,423	2,704	3,55I
60	0,I26	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	I,046	I,296	I,67I	2,000	2,390	2,660	3,460
I20	0,I26	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	I,04I	I,289	I,658	I,980	2,358	2,6I7	3,373
∞	0,I26	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	I,036	I,282	I,645	I,960	2,326	2,576	3,29I

Таблица IX

Критические значения F_{α} (критерии Фишера)

f_2 – степени свободы для меньшей дисперсии	f_1 – степени свободы для большей дисперсии											
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
I	I6I 4 052	200 4 999	2I6 5 403	225 5 625	230 5 764	234 5 889	237 5 928	239 5 98I	24I 6 022	242 6 056	243 6 082	244 6 I06
2	I8,5I 98,49	I9,00 99,0I	I9,I6 99,I7	I9,25 99,25	I9,30 99,30	I9,33 99,33	I9,36 99,34	I9,37 99,36	I9,38 99,38	I9,39 99,40	I9,40 99,4I	I9,4I 99,42
3	I0,I3 34,I2	9,55 30,8I	9,28 29,46	9,I2 28,7I	9,0I 28,24	8,94 27,9I	8,88 27,67	8,84 27,49	8,8I 27,34	8,78 27,23	8,76 27,I3	8,74 27,05
4	7,7I 2I,20	6,94 I8,00	6,59 I6,69	6,39 I5,98	6,26 I5,52	6,I6 I5,2I	6,09 I4,98	6,04 I4,80	6,00 I4,66	5,96 I4,54	5,93 I4,45	5,9I I4,37
5	6,6I I6,26	5,79 I3,27	5,4I I2,06	5,I9 II,39	5,05 I0,97	4,95 I0,67	4,88 I0,45	4,82 I0,27	4,78 I0,I5	4,74 I0,05	4,70 9,96	4,68 9,89
6	5,99 I3,74	5,I4 I0,92	4,76 9,78	4,53 9,I5	4,39 8,75	4,28 8,47	4,2I 8,26	4,I5 8,I0	4,I0 7,98	4,06 7,87	4,03 7,79	4,00 7,72
7	5,59 I2,25	4,74 9,55	4,35 8,45	4,I2 7,85	3,97 7,46	3,87 7,I9	3,79 7,00	3,73 6,84	3,68 6,7I	3,63 6,62	3,60 6,54	3,57 6,47
8	5,32 II,26	4,46 8,65	4,07 7,59	3,84 7,0I	3,69 6,63	3,58 6,37	3,50 6,I9	3,44 6,03	3,39 5,9I	3,34 5,82	3,3I 5,74	3,28 5,67
9	5,I2 I0,56	4,26 8,02	3,86 6,99	3,63 6,42	3,48 6,06	3,37 5,80	3,29 5,62	3,23 5,47	3,I8 5,35	3,I3 5,26	3,I0 5,I8	3,07 5,II
I0	4,96 I0,04	4,I0 7,56	3,7I 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	3,I4 5,2I	3,07 5,06	3,02 4,95	2,97 4,85	2,94 4,78	2,9I 4,7I

Продолжение табл. IX

f_2 (f_2 – степени свободы для меньшей дисперсии)	f_1 – степени свободы для большей дисперсии: I4	I6	20	24	30	40	50	75	I00	200	500	∞
I	245 6 I42	246 6 I69	248 6 208	249 6 234	250 6 258	25I 6 286	252 6 302	253 6 323	253 6 334	254 6 352	254 6 36I	254 6 366
2	I9,42 I9,43	I9,43 99,44	I9,44 99,45	I9,45 99,46	I9,46 99,47	I9,47 99,48	I9,47 99,48	I9,48 99,49	I9,49 99,49	I9,49 99,49	I9,50 99,50	I9,50 99,50
3	8,7I 26,92	8,69 26,83	8,66 26,69	8,64 26,60	8,62 26,50	8,60 26,4I	8,58 26,35	8,57 26,27	8,56 26,23	8,54 26,I8	8,54 26,I4	8,53 26,I2
4	5,87 I4,24	5,84 I4,I5	5,80 I4,02	5,77 I3,93	5,74 I3,83	5,7I I3,74	5,70 I3,69	5,68 I3,6I	5,66 I3,57	5,65 I3,52	5,64 I3,48	5,63 I3,46
5	4,64 9,77	4,60 9,68	4,56 9,55	4,53 9,47	4,50 9,38	4,46 9,29	4,44 9,24	4,42 9,I7	4,40 9,I3	4,38 9,07	4,37 9,04	4,36 9,02
6	3,96 7,60	3,92 7,52	3,87 7,39	3,84 7,3I	3,8I 7,23	3,77 7,I4	3,75 7,09	3,72 7,02	3,7I 6,99	3,69 6,94	3,68 6,90	3,67 6,88
7	3,52 6,35	3,49 6,27	3,44 6,I5	3,4I 6,07	3,38 5,98	3,34 5,90	3,32 5,85	3,29 5,78	3,28 5,75	3,25 5,70	3,24 5,67	3,23 5,65
8	3,23 5,56	3,20 5,48	3,I5 5,36	3,I2 5,28	3,08 5,20	3,05 5,II	3,03 5,06	3,00 5,00	2,98 4,96	2,96 4,9I	2,94 4,88	2,93 4,86
9	3,02 5,00	2,98 4,92	2,93 4,80	2,90 4,73	2,86 4,64	2,82 4,56	2,80 4,5I	2,77 4,45	2,76 4,4I	2,73 4,36	2,72 4,33	2,7I 4,3I
I0	2,86 4,60	2,82 4,52	2,77 4,4I	2,74 4,33	2,70 4,25	2,67 4,I7	2,64 4,I2	2,6I 4,05	2,59 4,0I	2,56 3,96	2,55 3,93	2,54 3,9I

Продолжение табл. IX

f_2 – степени свободы для меньшей дисперсии	f_1 – степени свободы для большей дисперсии											
f_2	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
II	4,84 9,85	3,98 7,20	3,59 6,22	3,36 5,67	3,20 5,32	3,09 5,07	3,0I 4,88	2,95 4,74	2,90 4,63	2,86 4,54	2,82 4,46	2,79 4,40
I2	4,75 9,33	3,88 6,93	3,49 5,95	3,26 5,4I	3,II 5,06	3,00 4,82	2,92 4,65	2,85 4,50	2,80 4,39	2,76 4,30	2,72 4,22	2,69 4,I6
I3	4,67 9,07	3,80 6,70	3,4I 5,74	3,I8 5,20	3,02 4,86	2,92 4,62	2,84 4,44	2,77 4,30	2,72 4,I9	2,67 4,I0	2,63 4,02	2,60 3,96
I4	4,60 8,86	3,74 6,5I	3,34 5,56	3,II 5,03	2,96 4,69	2,85 4,46	2,77 4,28	2,70 4,I4	2,65 4,03	2,60 3,94	2,56 3,86	2,53 3,80
I5	4,54 8,68	3,68 6,36	3,29 5,42	3,06 4,89	2,90 4,56	2,79 4,32	2,70 4,I4	2,64 4,00	2,59 3,89	2,55 3,80	2,5I 3,73	2,48 3,67
I6	4,49 8,53	3,63 6,23	3,24 5,29	3,0I 4,77	2,85 4,44	2,74 4,20	2,66 4,03	2,59 3,89	2,54 3,78	2,49 3,69	2,45 3,6I	2,42 3,55
I7	4,45 8,40	3,59 6,II	3,20 5,I8	2,96 4,67	2,8I 4,34	2,70 4,I0	2,62 3,93	2,55 3,79	2,50 3,68	2,45 3,59	2,4I 3,52	2,38 3,45

Продолжение табл. IX

f_2	f_1 – степени свободы для большей дисперсии											
	I4	I6	20	24	30	40	50	75	I00	200	500	∞
I1	2,74 4,29	2,70 4,2I	2,65 4,I0	2,6I 4,02	2,57 3,94	2,53 3,86	2,50 3,80	2,47 3,74	2,45 3,70	2,42 3,66	2,4I 3,62	2,40 3,60
I2	2,64 4,05	2,60 3,98	2,54 3,86	2,50 3,78	2,46 3,70	2,42 3,6I	2,40 3,56	2,36 3,49	2,35 3,46	2,32 3,4I	2,3I 3,38	2,30 3,36
I3	2,55 3,85	2,5I 3,78	2,46 3,67	2,42 3,59	2,38 3,5I	2,34 3,42	2,32 3,37	2,28 3,30	2,26 3,27	2,24 3,2I	2,22 3,I8	2,2I 3,I6
I4	2,48 3,70	2,44 3,62	2,39 3,5I	2,35 3,43	2,3I 3,34	2,27 3,26	2,24 3,2I	2,2I 3,I4	2,I9 3,II	2,I6 3,06	2,I4 3,02	2,I3 3,00
I5	2,43 3,56	2,39 3,48	2,33 3,36	2,29 3,29	2,25 3,20	2,2I 3,I2	2,I8 3,07	2,I5 3,00	2,I2 2,97	2,I0 2,92	2,08 2,89	2,07 2,87
I6	2,37 3,45	2,33 3,37	2,28 3,25	2,24 3,I8	2,20 3,I0	2,I6 3,0I	2,I3 2,96	2,09 2,89	2,07 2,86	2,04 2,80	2,02 2,77	2,0I 2,75
I7	2,33 3,35	2,29 3,27	2,23 3,I6	2,I9 3,08	2,I5 3,00	2,II 2,92	2,08 2,86	2,04 2,79	2,02 2,76	I,99 2,70	I,87 2,67	I,96 2,65

f_2 – степени свободы для меньшей дисперсии

Продолжение табл. IX

f_2	f_1 – степени свободы для большей дисперсии											
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
I8	4,4I 8,28	3,55 6,0I	3,I6 5,09	2,93 4,58	2,77 4,25	2,66 4,0I	2,58 3,85	2,5I 3,7I	2,46 3,60	2,4I 3,5I	2,37 3,44	2,34 3,37
I9	4,38 8,I8	3,52 5,93	3,I3 5,0I	2,90 4,50	2,74 4,I7	2,63 3,94	2,55 3,77	2,48 3,63	2,43 3,52	2,38 2,43	2,34 3,36	2,3I 3,30
20	4,35 8,I0	3,49 5,85	3,I0 4,94	2,87 4,43	2,7I 4,I0	2,60 3,87	2,52 3,7I	2,45 3,56	2,40 3,45	2,35 3,37	2,3I 3,30	2,28 3,23
2I	4,32 8,02	3,47 5,78	3,07 4,87	2,84 4,37	2,68 4,04	2,57 3,8I	2,49 3,65	2,42 3,5I	2,37 3,40	2,32 3,3I	2,28 3,24	2,25 3,I7
22	4,30 7,94	3,44 5,72	3,05 4,82	2,82 4,3I	2,66 3,99	2,55 3,76	2,47 3,59	2,40 3,45	2,35 3,35	2,30 3,26	2,26 3,I8	2,23 3,I2
23	4,28 7,88	3,42 5,66	3,03 4,76	2,80 4,26	2,64 3,94	2,53 3,7I	2,45 3,54	2,38 3,4I	2,32 3,30	2,28 3,2I	2,24 3,I4	2,20 3,07
24	4,26 7,82	3,40 5,6I	3,0I 4,72	2,78 4,22	2,62 3,90	2,5I 3,67	2,43 3,50	2,36 3,36	2,30 3,25	2,26 3,I7	2,22 3,09	2,I8 3,03
25	4,24 7,77	3,38 5,57	2,99 4,68	2,76 4,I8	2,60 3,86	2,49 3,63	2,4I 3,46	2,34 3,32	2,25 3,2I	2,24 3,I3	2,20 3,05	2,I6 2,99
26	4,22 7,72	3,37 5,53	2,98 4,64	2,74 4,I4	2,59 3,82	2,47 3,59	2,39 3,42	2,32 3,29	2,27 3,I7	2,22 3,09	2,I8 3,02	2,I5 2,96
27	4,2I 7,68	3,35 5,49	2,96 4,60	2,73 4,II	2,57 3,79	2,46 3,56	2,37 3,39	2,30 3,26	2,25 3,I4	2,20 3,06	2,I6 2,98	3,I3 2,93
28	4,20 7,64	3,34 5,45	2,95 4,57	2,7I 4,07	2,56 3,76	2,44 3,53	2,36 3,36	2,29 3,23	2,24 3,II	2,I9 3,03	2,I5 2,95	2,I2 2,90

f_2 – степени свободы для меньшей дисперсии

Продолжение табл.IX

f_2 – степени свободы для меньшей дисперсии	f_1 – степени свободы для большей дисперсии											
	I4	I6	20	24	30	40	50	75	I00	200	500	∞
I8	2,29 3,27	2,25 3,I9	2,I9 3,07	2,I5 3,00	2,II 2,9I	2,07 2,83	2,04 2,78	2,00 2,7I	I,98 2,68	I,95 2,62	I,93 2,59	I,92 2,57
I9	2,26 3,I9	2,2I 3,I2	2,I5 3,00	2,II 2,92	2,07 2,84	2,02 2,76	2,00 2,70	I,96 2,63	I,94 2,60	I,9I 2,54	I,90 2,5I	I,88 2,49
20	2,23 3,I8	2,I8 3,05	I,I2 2,94	2,08 2,86	2,04 2,77	I,99 2,69	I,96 2,63	I,92 2,56	I,90 2,53	I,87 2,47	I,85 2,44	I,84 2,42
2I	2,20 3,07	2,I5 2,99	2,09 2,88	2,05 2,80	2,00 2,72	I,96 2,63	I,93 2,58	I,89 2,5I	I,87 2,47	I,84 2,42	I,82 2,38	I,8I 2,36
22	2,I8 3,02	2,I3 2,94	2,07 2,83	2,03 2,75	I,98 2,67	I,93 2,58	I,9I 2,53	I,87 2,46	I,84 2,42	I,8I 2,37	I,80 2,33	I,78 2,3I
23	2,I4 2,97	2,I0 2,89	2,04 2,78	2,00 2,70	I,96 2,62	I,9I 2,53	I,88 2,48	I,84 2,4I	I,82 2,37	I,79 2,32	I,77 2,28	I,76 2,26
24	2,I3 2,93	2,09 2,85	2,02 2,74	I,98 2,66	I,94 2,58	I,89 2,49	I,86 2,44	I,82 2,36	I,80 2,33	I,76 2,27	I,74 2,23	I,73 2,2I
25	2,II 2,89	2,06 2,8I	2,00 2,70	I,96 2,62	I,92 2,54	I,87 2,45	I,84 2,40	I,80 2,32	I,77 2,29	I,74 2,23	I,72 2,I9	I,7I 2,I7
26	2,I6 2,85	2,05 2,77	I,99 2,66	I,95 2,58	I,90 2,50	I,85 2,4I	I,82 2,36	I,78 2,28	I,76 2,25	I,72 2,I9	I,70 2,I5	I,69 2,I3

Продолжение табл. IX

f_2 — степени свободы для меньшей дисперсии	f_1 —степени свободы для большей дисперсии											
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
29	4,I8 7,60	3,33 5,42	2,93 4,54	2,70 4,04	2,54 3,73	2,43 2,50	2,35 3,33	2,28 2,20	2,22 3,08	2,I8 3,00	2,I4 2,92	2,I0 2,87
30	4,I7 7,56	3,32 5,39	2,92 4,5I	2,69 4,02	2,53 3,70	2,42 3,47	2,34 3,30	2,27 3,I7	2,2I 3,06	2,I6 2,98	2,I2 2,90	2,09 2,84
32	4,I5 7,50	3,30 5,34	2,90 4,46	2,67 3,97	2,5I 3,66	2,40 3,42	2,32 3,25	2,25 3,I2	2,I9 3,0I	2,I4 2,94	2,I0 2,86	2,07 2,80
34	4,I3 7,44	3,28 5,29	2,88 4,42	2,65 3,93	2,49 3,6I	2,38 3,38	2,30 3,2I	2,23 3,08	2,I7 2,97	2,I2 2,89	2,08 2,82	2,05 2,76
36	4,II 7,39	3,26 5,25	2,86 4,38	2,63 3,89	2,48 2,58	2,36 3,35	2,28 3,I8	2,2I 3,04	2,I5 2,94	2,I0 2,86	2,06 3,78	2,03 2,72
38	4,I0 7,35	3,25 5,2I	2,85 4,34	2,65 3,86	2,46 3,54	2,35 3,32	2,26 3,I5	2,I9 3,02	2,I4 2,9I	2,09 2,82	2,05 2,75	2,02 2,69
40	4,08 7,3I	3,23 5,I8	2,84 4,3I	2,6I 3,83	2,45 3,5I	2,34 3,29	2,25 3,I2	2,I8 2,99	2,I2 2,88	2,07 2,80	2,04 2,73	2,00 2,66

Продолжение табл. IX

f_2 — степени свободы для меньшей дисперсии	f_1 — степени свободы для большей дисперсии											
	I4	I6	20	24	30	40	50	75	I00	200	500	∞
27	2,08 2,83	2,03 2,74	I,97 2,63	I,93 2,55	I,88 2,47	I,84 2,38	I,80 2,33	I,76 2,25	I,74 2,2I	I,7I 2,I6	I,68 2,I2	I,67 2,I0
28	2,07 2,80	2,02 2,7I	I,96 2,60	I,9I 2,52	I,87 2,44	I,8I 2,35	I,78 2,30	I,75 2,22	I,72 2,I8	I,69 2,I3	I,67 2,09	I,65 2,06
29	2,05 2,77	2,00 2,68	I,94 2,57	I,90 2,49	I,85 2,4I	I,80 2,32	I,77 2,27	I,73 2,I9	I,7I 2,I5	I,68 2,I0	I,65 2,06	I,64 2,03
30	2,04 2,74	I,99 2,66	I,93 2,55	I,89 2,47	I,84 2,38	I,79 2,29	I,76 2,24	I,72 2,I6	I,69 2,I3	I,66 2,07	I,64 2,03	I,62 2,0I
32	2,02 2,70	I,97 2,62	I,9I 2,5I	I,86 2,42	I,82 2,34	I,76 2,25	I,74 2,20	I,69 2,I2	I,67 2,08	I,64 2,02	I,6I I,98	I,59 I,96
34	2,00 2,66	I,95 2,58	I,89 2,47	I,84 2,38	I,80 2,30	I,74 2,2I	I,7I 2,I5	I,67 2,08	I,64 2,04	I,6I I,98	I,59 I,94	I,57 I,9I
36	I,98 2,62	I,93 2,54	I,87 2,43	I,82 2,35	I,78 2,26	I,72 2,I7	I,69 2,I2	I,65 2,04	I,62 2,00	I,59 I,94	I,56 I,90	I,55 I,87
38	I,96 2,59	I,92 2,5I	I,85 2,40	I,80 2,32	I,76 2,22	I,7I 2,I4	I,67 2,08	I,63 2,00	I,60 I,97	I,57 I,90	I,54 I,86	I,53 I,84
40	I,95 2,56	I,90 2,49	I,84 2,37	I,79 2,29	I,74 2,20	I,69 2,II	I,66 2,05	I,6I I,97	I,59 I,94	I,55 I,88	I,53 I,84	I,5I I,8I

Продолжение табл. IX

f_2 – степени свободы для меньшей дисперсии	f_1 – степени свободы для большей дисперсии											
f_2	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
42	4,07 7,27	3,22 5,I5	2,83 4,29	2,59 3,80	2,44 3,49	2,32 3,26	2,24 3,I0	2,I7 2,96	2,II 2,86	2,06 2,77	2,02 2,70	I,99 2,64
44	4,06 7,24	3,2I 5,I2	2,82 4,26	2,58 3,78	2,43 3,46	2,3I 3,24	2,23 3,07	2,I6 2,94	2,I0 2,84	2,05 2,75	2,0I 2,68	I,98 2,62
46	4,05 7,2I	3,20 5,I0	2,8I 4,24	2,57 3,76	2,42 3,44	2,30 3,22	2,22 3,05	2,I4 2,92	2,09 2,82	2,04 2,73	2,00 2,66	I,97 2,60
48	4,04 7,I9	3,I9 5,08	2,80 4,22	2,56 3,74	2,4I 3,42	2,30 3,20	2,2I 3,04	2,I4 2,90	2,08 2,80	2,03 2,7I	I,99 2,64	I,96 2,58
50	4,03 7,I7	3,I8 5,06	2,79 4,20	2,56 3,72	2,40 3,4I	2,29 3,I8	2,20 3,02	2,I3 2,88	2,07 2,78	2,02 2,70	I,98 2,62	I,95 2,56
55	4,02 7,I2	3,I7 5,0I	2,78 4,I6	2,54 3,68	2,38 3,37	2,27 3,I5	2,I8 2,98	2,II 2,85	2,05 2,75	2,00 2,66	I,97 2,59	I,93 2,53
60	4,00 7,08	3,I5 4,98	2,76 4,I3	2,52 3,65	2,37 3,34	2,25 3,I2	2,I7 2,95	2,I0 2,82	2,04 2,72	I,99 2,63	I,95 2,56	I,93 2,50
65	3,99 7,04	3,I4 4,95	2,75 4,I0	2,5I 3,62	2,36 3,3I	2,24 3,09	2,I5 2,93	2,08 2,79	2,0I 2,70	I,98 2,6I	I,94 2,54	I,90 2,47
70	3,98 7,0I	3,I3 4,92	2,74 4,08	2,50 3,60	2,35 3,29	2,23 3,07	2,I4 2,9I	2,07 2,77	2,0I 2,67	I,97 2,59	I,93 2,5I	I,89 2,45
80	3,96 6,96	3,II 4,88	2,72 4,04	2,48 3,56	2,33 3,25	2,2I 3,04	2,I2 2,87	2,05 2,74	I,99 2,64	I,95 2,55	I,9I 2,48	I,89 2,4I
I00	3,94 6,90	3,09 4,82	2,70 3,98	2,46 3,5I	2,30 3,20	2,I9 2,99	2,I0 2,82	2,03 2,69	I,97 2,59	I,92 2,5I	I,88 2,43	I,85 2,36

Продолжение табл.IX

f_2 — степени свободы для меньшей дисперсии	f_1 — степени свободы для большей дисперсии											
	I4	I6	20	24	30	40	50	75	I00	200	500	∞
42	I,94 2,54	I,89 2,46	I,82 2,35	I,78 2,26	I,73 2,I7	I,68 2,08	I,64 2,02	I,60 I,94	I,57 I,9I	I,54 I,85	I,5I I,80	I,49 I,78
44	I,92 2,52	I,88 2,44	I,8I 2,32	I,76 2,24	I,72 2,I5	I,66 2,06	I,63 2,00	I,58 I,92	I,56 I,88	I,52 I,82	I,50 I,78	I,48 I,75
46	I,9I 2,50	I,87 2,42	I,80 2,30	I,75 2,22	I,7I 2,I3	I,65 2,04	I,62 I,98	I,57 I,90	I,54 I,86	I,5I I,80	I,48 I,76	I,46 I,72
48	I,90 2,48	I,86 2,40	I,79 2,28	I,74 2,20	I,70 2,II	I,64 2,02	I,6I I,96	I,56 I,88	I,53 I,84	I,50 I,78	I,47 I,73	I,45 I,70
50	I,90 2,46	I,85 2,39	I,78 2,26	I,74 2,I8	I,69 2,I0	I,63 2,00	I,60 I,94	I,55 I,86	I,52 I,82	I,48 I,76	I,46 I,7I	I,44 I,68
55	I,88 2,43	I,83 2,35	I,76 2,23	I,72 2,I5	I,67 2,06	I,6I I,96	I,58 I,90	I,52 I,82	I,50 I,78	I,46 I,7I	I,43 I,66	I,4I I,64
60	I,86 2,40	I,8I 2,32	I,75 2,20	I,70 2,I2	I,65 2,03	I,59 I,93	I,56 I,87	I,50 I,79	I,48 I,74	I,44 I,68	I,4I I,63	I,39 I,60
65	I,85 2,37	I,80 2,30	I,73 2,I8	I,68 2,09	I,63 2,00	I,57 I,90	I,54 I,84	I,49 I,76	I,46 I,7I	I,42 I,64	I,39 I,60	I,37 I,56
70	I,84 2,35	I,79 2,28	I,72 2,I5	I,67 2,07	I,62 I,98	I,56 I,88	I,53 I,82	I,47 I,74	I,45 I,69	I,40 I,62	I,37 I,56	I,35 I,53
80	I,82 2,32	I,77 2,24	I,70 2,II	I,65 2,03	I,60 I,94	I,54 I,84	I,5I I,78	I,45 I,70	I,42 I,65	I,38 I,57	I,35 I,52	I,32 I,49
I00	I,79 2,26	I,75 2,I9	I,68 2,06	I,63 I,98	I,57 I,89	I,5I I,79	I,48 I,73	I,42 I,64	I,39 I,59	I,34 I,5I	I,30 I,46	I,28 I,43

Продолжение табл. IX

f_2 – степени свободы для меньшей дисперсии	f_1 – степени свободы для большей дисперсии											
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
I25	3,92 6,84	3,07 4,78	2,68 3,94	2,44 3,47	2,29 3,I7	2,I7 2,95	2,08 2,79	2,0I 2,65	I,95 2,56	I,90 2,47	I,86 2,40	I,83 2,33
I50	3,9I 6,8I	3,06 4,75	2,67 3,9I	2,43 3,44	2,27 3,I4	2,I6 2,92	2,07 2,76	2,00 2,62	I,94 2,53	I,89 2,44	I,85 2,37	I,82 2,30
200	3,89 6,76	3,04 4,7I	2,65 3,88	2,4I 3,4I	2,26 3,II	2,I4 2,90	2,05 2,73	I,98 2,60	I,92 2,50	I,87 2,4I	I,83 2,34	I,80 2,28
400	3,86 6,70	3,02 4,66	2,62 3,83	2,39 3,36	2,23 3,06	2,I2 2,85	2,03 2,69	I,96 2,55	I,90 2,46	I,85 2,37	I,8I 2,29	I,78 2,23
I000	3,85 6,66	3,00 4,6I	2,6I 3,80	2,38 3,34	2,22 3,04	2,I0 2,82	2,02 2,66	I,95 2,53	I,89 2,43	I,84 2,34	I,80 2,26	I,76 2,20
∞	3,84 6,64	2,99 4,60	2,60 3,78	2,37 3,32	2,2I 3,02	2,09 2,80	2,0I 2,64	I,94 2,5I	I,88 2,4I	I,83 2,32	I,79 2,24	I,75 2,I8

Примечание. Нулевая гипотеза принимается при $F \leq F_{05}$ и отвергается при $F > F_{01}$.

Продолжение табл. IX

f_2 – степени свободы для меньшей дисперсии	f_1 –степени свободы для большей дисперсии											
	I4	I6	20	24	30	40	50	75	I00	200	500	∞
I25	I,77 2,23	I,72 2,I5	I,65 2,03	I,60 I,94	I,55 I,85	I,49 I,75	I,45 I,68	I,39 I,59	I,36 I,54	I,3I I,46	I,27 I,40	I,25 I,37
I50	I,76 2,20	I,7I 2,I2	I,64 2,00	I,59 I,9I	I,54 I,83	I,47 I,72	I,44 I,66	I,37 I,56	I,34 I,5I	I,29 I,43	I,25 I,37	I,22 I,33
200	I,74 2,I7	I,69 2,09	I,62 I,97	I,57 I,88	I,52 I,79	I,45 I,69	I,42 I,62	I,35 I,53	I,32 I,48	I,26 I,39	I,22 I,33	I,I9 I,28
400	I,72 2,I2	I,67 2,04	I,60 I,92	I,54 I,84	I,49 I,74	I,42 I,64	I,38 I,57	I,32 I,47	I,28 I,42	I,22 I,32	I,I6 I,24	I,I3 I,I9
I000	I,70 2,09	I,65 2,0I	I,58 I,89	I,53 I,8I	I,47 I,7I	I,4I I,6I	I,36 I,54	I,30 I,44	I,26 I,38	I,I9 I,28	I,I3 I,I9	I,08 I,II
∞	I,69 2,07	I,64 I,99	I,57 I,87	I,52 I,79	I,46 I,69	I,40 I,59	I,35 I,52	I,28 I,4I	I,24 I,36	I,I7 I,25	I,II I,I5	I,00 I,09

Таблица X

Критические значения распределения χ^2

f	q: 99,95	99,9	99,5	99,0	97,5	95,0	90,0	80,0	70,0	60,0	50,0
I	$0,0^{6}393$	$0,0^{5}157$	$0,0^{4}393$	$0,0^{3}157$	$0,0^{3}982$	$0,0^{2}393$	0,0I58	0,0642	0,I48	0,275	0,455
2	$0,0^{2}100$	$0,0^{2}200$	0,0I00	0,020I	0,0506	0,I03	0,2II	0,446	0,7I3	I,02	I,39
3	0,0I53	0,0243	0,07I7	0,II5	0,2I6	0,352	0,584	I,00	I,42	I,87	2,37
4	0,0639	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,7II	I,06	I,65	2,I9	2,75	3,36
5	0,I58	0,2I0	0,4I2	0,554	0,83I	I,I5	I,6I	2,34	3,00	3,66	4,35
6	0,299	0,38I	0,676	0,872	I,24	I,64	2,20	3,07	3,83	4,57	5,35
7	0,485	0,598	0,989	I,24	I,69	2,I7	2,83	3,82	4,67	5,49	6,35
8	0,7I0	0,857	I,34	I,65	2,I8	2,73	3,49	4,59	5,53	6,42	7,34
9	0,972	I,I5	I,73	2,09	2,70	3,33	4,I7	5,38	6,39	7,36	8,34
I0	I,26	I,48	2,I6	2,56	3,25	3,94	4,87	6,I8	7,27	8,30	9,34
II	I,59	I,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,I5	9,24	I0,3
I2	I,93	2,2I	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,8I	9,03	I0,2	II,3
I3	2,3I	2,62	3,57	4,II	5,0I	5,89	7,04	8,63	9,93	II,I	I2,3
I4	2,70	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	I0,8	I2,I	I3,3
I5	3,II	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	I0,3	II,7	I3,0	I4,3
I6	3,54	3,94	5,I4	5,8I	6,9I	7,96	9,3I	II,2	I2,6	I4,0	I5,3
I7	3,98	4,42	5,70	6,4I	7,56	8,67	I0,I	I2,0	I3,5	I4,9	I6,3
I8	4,44	4,90	6,26	7,0I	8,23	9,39	I0,9	I2,9	I4,4	I5,9	I7,3
I9	4,9I	5,4I	6,84	7,63	8,9I	I0,I	II,7	I3,7	I5,4	I6,9	I8,3
20	5,40	5,92	7,43	8,26	9,59	I0,9	I2,4	I4,6	I6,3	I7,8	I9,3

Продолжение табл. X

	q									
f	40,0	30,0	20,0	10,0	5,0	2,5	I,0	0,5	0,I	0,05
I	0,708	I,07	1,64	2,7I	3,84	5,02	6,63	7,88	I0,8	I2,I
2	I,83	2,4I	3,22	4,6I	5,99	7,38	9,2I	I0,6	I3,8	I5,2
3	2,95	3,67	4,64	6,25	7,8I	9,35	II,3	I2,8	I6,3	I7,7
4	4,04	4,88	5,99	7,78	9,49	II,I	I3,3	I4,9	I8,5	20,0
5	5,I3	6,06	7,29	9,24	II,I	I2,8	I5,I	I6,7	20,5	22,I
6	6,2I	7,23	8,56	I0,6	I2,6	I4,4	I6,8	I8,5	22,5	24,I
7	7,28	8,38	9,80	I2,0	I4,I	I6,0	I8,5	20,3	24,3	26,0
8	8,35	9,52	II,0	I3,4	I5,5	I7,5	20,I	22,0	26,I	27,9
9	9,4I	I0,7	I2,2	I4,7	I6,9	I9,0	2I,7	23,6	27,9	29,7
I0	I0,5	II,8	I3,4	I6,0	I8,3	20,5	23,2	25,2	29,6	3I,4
II	II,5	I2,9	I4,6	I7,3	I9,7	2I,9	24,7	26,8	3I,3	33,I
I2	I2,6	I4,0	I5,8	I8,5	2I,0	23,3	26,2	28,3	32,9	34,8
I3	I3,6	I5,I	I7,0	I9,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5	36,5
I4	I4,7	I6,2	I8,2	2I,I	23,7	26,I	29,I	3I,3	36,I	38,I
I5	I5,7	I7,3	I9,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7	39,7
I6	I6,8	I8,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3	4I,3
I7	I7,8	I9,5	2I,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8	42,9
I8	I8,9	20,6	22,8	26,0	28,9	3I,5	34,8	37,2	42,3	44,4
I9	I9,9	2I,7	23,9	27,2	30,I	32,9	36,2	38,6	43,8	46,0
20	2I,0	22,8	25,0	28,4	3I,4	34,2	37,6	40,0	45,3	47,5

Продолжение табл. X

f	q 99,95	99,9	99,5	99,0	97,5	95,0	90,0	80,0	70,0	60,0	50,0
2I	5,90	6,45	8,03	8,90	I0,3	II,6	I3,2	I5,4	I7,2	I8,8	20,3
22	6,40	6,98	8,64	9,54	II,0	I2,3	I4,0	I6,3	I8,I	I9,7	2I,3
23	6,92	7,53	9,26	I0,2	II,7	I3,I	I4,8	I7,2	I9,0	20,7	22,3
24	7,45	8,08	9,89	I0,9	I2,4	I3,8	I5,7	I8,I	I9,9	2I,7	23,3
25	7,99	8,65	I0,5	II,5	I3,I	I4,6	I6,5	I8,9	20,9	22,6	24,3
26	8,54	9,22	II,2	I2,2	I3,8	I5,4	I7,3	I9,8	2I,8	23,6	25,3
27	9,09	9,80	II,8	I2,9	I4,6	I6,2	I8,I	20,7	22,7	24,5	26,3
28	9,66	I0,4	I2,5	I3,6	I5,3	I6,9	I8,9	2I,6	23,6	25,5	27,3
29	I0,2	II,0	I3,I	I4,3	I6,0	I7,7	I9,8	22,5	24,6	26,5	28,3
30	I0,8	II,6	I3,8	I5,0	I6,8	I8,5	20,6	23,4	25,5	27,4	29,3
3I	II,4	I2,2	I4,5	I5,7	I7,5	I9,3	2I,4	24,3	26,4	28,4	30,3
32	I2,0	I2,8	I5,I	I6,4	I8,3	20,I	22,3	25,I	27,4	29,4	3I,3
33	I2,6	I3,4	I5,8	I7,I	I9,0	20,9	23,I	26,0	28,3	30,3	32,3
34	I3,2	I4,I	I6,5	I7,8	I9,8	2I,7	24,0	26,9	29,2	3I,3	33,3
35	I3,8	I4,7	I7,2	I8,5	20,6	22,5	24,8	27,8	30,2	32,3	34,3
36	I4,4	I5,3	I7,9	I9,2	2I,3	23,3	25,6	28,7	3I,I	33,3	35,3
37	I5,0	I6,0	I8,6	20,0	22,I	24,I	26,5	29,6	32,I	34,2	36,3
38	I5,6	I6,6	I9,3	20,7	22,9	24,9	27,3	30,5	33,0	35,2	37,3
39	I6,3	I7,3	20,0	2I,4	23,7	25,7	28,2	3I,4	33,9	36,2	38,3
40	I6,9	I7,9	20,7	22,2	24,4	26,5	29,I	32,3	34,9	37,I	39,3

Продолжение табл.X

	q									
f	40,0	30,0	20,0	I0,0	5,0	2,5	I,0	0,5	0,I	0,05
2I	22,0	23,9	26,2	29,6	32,7	35,5	38,9	4I,4	46,8	49,0
22	23,0	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3	50,5
23	24,I	26,0	28,4	32,0	35,2	38,I	4I,6	44,2	49,7	52,0
24	25,I	27,I	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	5I,2	53,5
25	26,I	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6	54,9
26	27,2	29,2	3I,8	35,6	38,9	4I,9	45,6	48,3	54,I	56,4
27	28,2	30,3	32,9	36,7	40,I	43,2	47,0	49,6	55,5	57,9
28	29,2	3I,4	34,0	37,9	4I,3	44,5	48,3	5I,0	56,9	59,3
29	30,3	32,5	35,I	39,I	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3	60,7
30	3I,3	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7	62,2
3I	32,3	34,6	37,4	4I,4	45,0	48,2	52,2	55,0	6I,I	63,6
32	33,4	35,7	38,5	42,6	46,2	49,5	53,5	56,3	62,5	65,0
33	34,4	36,7	39,6	43,7	47,4	50,7	54,8	57,6	63,9	66,4
34	35,4	37,8	40,7	44,9	48,6	52,0	56,I	59,0	65,2	67,8
35	36,5	38,9	4I,8	46,I	49,8	53,2	57,3	60,3	66,6	69,2
36	37,5	39,9	42,9	47,2	5I,0	54,4	58,6	6I,6	68,0	70,6
37	38,5	4I,0	44,0	48,4	52,2	55,7	59,9	62,9	69,3	72,0
38	39,6	42,0	45,I	49,5	53,4	56,9	6I,2	64,2	70,7	73,4
39	40,6	43,I	46,2	50,7	54,6	58,I	62,4	65,5	72,I	74,7
40	4I,6	44,2	47,3	5I,8	55,8	59,3	63,7	66,8	73,4	76,I

Продолжение табл. X

f	q										
	99,95	99,9	99,5	99,0	97,5	95,0	90,0	80,0	70,0	60,0	50,0
4I	I7,5	I8,6	2I,4	22,9	25,2	27,3	29,9	33,3	35,8	38,I	40,3
42	I8,2	I9,2	22,I	23,7	26,0	28,I	30,8	34,2	36,8	39,I	4I,3
43	I8,8	I9,9	22,9	24,4	26,8	29,0	3I,6	35,I	37,7	40,0	42,3
44	I9,5	20,6	23,6	25,I	27,6	29,8	32,5	36,0	38,6	4I,0	43,3
45	20,I	2I,3	24,3	25,9	28,4	30,6	33,4	36,9	39,6	42,0	44,3
46	20,8	2I,9	25,0	26,7	29,2	3I,4	34,2	37,8	40,5	43,0	45,3
47	2I,5	22,6	25,8	27,4	30,0	32,3	35,I	38,7	4I,5	43,9	46,3
48	22,I	23,3	26,5	28,2	30,8	33,I	35,9	39,6	42,4	44,9	47,3
49	22,8	24,0	27,2	28,9	3I,6	33,9	36,8	40,5	43,4	45,9	48,3
50	23,5	24,7	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	4I,4	44,3	46,9	49,3

Примечание. Таблица взята из работы A.Hald and Sinkbaek. A table of percentage points of the χ^2-distribution. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1950, стр.I68–I75.

Продолжение табл.X

	q									
f	40,0	30,0	20,0	I0,0	5,0	2,5	I,0	0,5	0,I	0,05
4I	42,7	45,2	48,4	52,9	56,9	60,6	65,0	68,I	74,7	77,5
42	43,7	46,3	49,5	54,I	58,I	6I,8	66,2	69,3	76,I	78,8
43	44,7	47,3	50,5	55,2	59,3	63,0	67,5	70,6	77,4	80,2
44	45,7	48,4	5I,6	56,4	60,5	64,2	68,7	7I,9	78,7	8I,5
45	46,8	49,5	52,7	57,5	6I,7	65,4	70,0	73,2	80,I	82,9
46	47,8	50,5	53,8	58,6	62,8	66,6	7I,2	74,4	8I,4	84,2
47	48,8	5I,6	54,9	59,8	64,0	67,8	72,4	75,7	82,7	85,6
48	49,8	52,6	56,0	60,9	65,2	69,0	73,7	77,0	84,0	86,9
49	50,9	53,7	57,I	62,0	66,3	70,2	74,9	78,2	85,4	88,2
50	5I,9	54,7	58,2	63,2	67,5	7I,4	76,2	79,5	86,7	89,6

Продолжение табл. X

f	q										
	99,95	99,9	99,5	99,0	97,5	95,0	90,0	80,0	70,0	60,0	50,0
5I	24,I	25,4	28,7	30,5	33,2	35,6	38,6	42,4	45,3	47,8	50,3
52	24,8	26,I	29,5	3I,2	34,0	36,4	39,4	43,3	46,2	48,8	5I,3
53	25,5	26,8	30,2	32,0	34,8	37,3	40,3	44,2	47,2	49,8	52,3
54	26,2	27,5	3I,0	32,8	35,6	38,I	4I,2	45,I	48,I	50,8	53,3
55	26,9	28,2	3I,7	33,6	36,4	39,0	42,I	46,0	49,I	5I,7	54,3
56	27,6	28,9	32,5	34,3	37,2	39,8	42,9	47,0	50,0	52,7	55,3
57	28,2	29,6	33,2	35,I	38,0	40,6	43,8	47,9	5I,0	53,7	56,3
58	28,9	30,3	34,0	35,9	38,8	4I,5	44,7	48,8	5I,9	54,7	57,3
59	29,6	3I,0	34,8	36,7	39,7	42,3	45,6	49,7	52,9	55,6	58,3
60	30,3	3I,7	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	50,6	53,8	56,6	59,3
6I	3I,0	32,5	36,3	38,3	4I,3	44,0	47,3	5I,6	54,8	57,6	60,3
62	3I,7	33,2	37,I	39,I	42,I	44,9	48,2	52,5	55,7	58,6	6I,3
63	32,5	33,9	37,8	39,9	43,0	45,7	49,I	53,4	56,7	59,6	62,3
64	33,2	34,6	38,6	40,6	43,8	46,6	50,0	54,3	57,6	60,5	63,3
65	33,9	35,4	39,4	4I,4	44,6	47,4	50,9	55,3	58,6	6I,5	64,3
66	34,6	36,I	40,2	42,2	45,4	48,3	5I,8	56,2	59,5	62,5	65,3
67	35,3	36,8	40,9	43,0	46,3	49,2	52,7	57,I	60,5	63,5	66,3
68	36,0	37,6	4I,7	43,8	47,I	50,0	53,5	58,0	6I,4	64,4	67,3
69	36,7	38,3	42,5	44,6	47,9	50,9	54,4	59,0	62,4	65,4	68,3
70	37,5	39,0	43,3	45,4	48,8	5I,7	55,3	59,9	63,3	66,4	69,3

Продолжение табл,X

f	q 40,0	30,0	20,0	I0,0	5,0	2,5	I,0	0,5	0,I	0,05
5I	52,9	55,8	59,2	64,3	68,7	72,6	77,4	80,7	88,0	90,9
52	53,9	56,8	60,3	65,4	69,8	73,8	78,6	82,0	89,3	92,2
53	55,0	57,9	6I,4	66,5	7I,0	75,0	79,8	83,3	90,6	93,5
54	56,0	58,9	62,5	67,7	72,2	76,2	8I,I	84,5	9I,9	94,8
55	57,0	60,0	63,6	68,8	73,3	77,4	82,3	85,7	93,2	96,2
56	58,0	6I,0	64,7	69,9	74,5	78,6	83,5	87,0	94,5	97,5
57	59,I	62,I	65,7	7I,0	75,6	79,8	84,7	88,2	95,8	98,8
58	60,I	63,I	66,8	72,2	76,8	80,9	86,0	89,5	97,0	I00,I
59	6I,I	64,2	67,9	73,3	77,9	82,I	87,2	90,7	98,3	I0I,4
60	62,I	65,2	69,0	74,4	79,I	83,3	88,4	92,0	99,6	I02,7
6I	63,2	66,3	70,0	75,5	80,2	84,5	89,6	93,2	I00,9	I04,0
62	64,2	67,3	7I,I	76,6	8I,4	85,7	90,8	94,4	I02,2	I05,3
63	65,2	68,4	72,2	77,7	82,5	86,8	92,0	95,6	I03,4	I06,6
64	66,2	69,4	73,3	78,9	83,7	88,0	93,2	96,9	I04,7	I07,9
65	67,2	70,5	74,4	80,0	84,8	89,2	94,4	98,I	I06,0	I09,2
66	68,3	7I,5	75,4	8I,I	86,0	90,3	95,6	99,3	I07,3	II0,5
67	69,3	72,6	76,5	82,2	87,I	9I,5	96,8	I00,6	I08,5	III,7
68	70,3	73,6	77,6	83,3	88,3	92,7	98,0	I0I,8	I09,8	II3,0
69	7I,3	74,6	78,6	84,4	89,4	93,9	99,2	I03,0	III,I	II4,3
70	72,4	75,7	79,7	85,5	90,5	95,0	I00,4	I04,2	II2,3	II5,6

Продолжение табл. X

f	q 99,95	99,9	99,5	99;0	97,5	95,0	90,0	80,0	70,0	60,0	50,0
7I	38,2	39,8	44,I	46,2	49,6	52,6	56,2	60,8	64,3	67,4	70,3
72	38,9	40,5	44,8	47,I	50,4	53,5	57,I	6I,8	65,3	68,4	7I,3
73	39,6	4I,3	45,6	47,9	5I,3	54,3	58,0	62,7	66,2	69,3	72,3
74	40,4	42,0	46,4	48,7	52,I	55,2	58,9	63,6	67,2	70,3	73,3
75	4I,I	42,8	47,2	49,5	52,9	56,I	59,8	64,5	68,I	7I,3	74,3
76	4I,8	43,5	48,0	50,3	53,8	56,9	60,7	65,5	69,I	72,3	75,3
77	42,6	44,3	48,8	5I,I	54,6	57,8	6I,6	66,4	70,0	73,2	76,3
78	43,3	45,0	49,6	5I,9	55,5	58,7	62,5	67,3	7I,0	74,2	77,3
79	44,I	45,8	50,4	52,7	56,3	59,5	63,4	68,3	72,0	75,2	78,3
80	44,8	46,5	5I,2	53,5	57,2	60,4	64,3	69,2	72,9	76,2	79,3
8I	45,5	47,3	52,0	54,4	58,0	6I,3	65,2	70,I	73,9	77,2	80,3
82	46,3	48,0	52,8	55,2	58,8	62,I	66,I	7I,I	74,8	78,I	8I,3
83	47,0	48,8	53,6	56,0	59,7	63,0	67,0	72,0	75,8	79,I	82,3
84	47,8	49,6	54,4	56,8	60,5	63,9	67,9	72,9	76,8	80,I	83,3
85	48,5	50,3	55,2	57,6	6I,4	64,7	68,8	73,9	77,7	8I,I	84,3
86	49,3	5I,I	56,0	58,5	62,2	65,6	69,7	74,8	78,7	82,I	85,3
87	50,0	5I,9	56,8	59,3	63,I	66,5	70,6	75,7	79,6	83,0	86,3
88	50,8	52,6	57,6	60,I	63,9	67,4	7I,5	76,7	80,6	84,0	87,3
89	5I,5	53,4	58,4	60,9	64,8	68,2	72,4	77,6	8I,6	85,0	88,3
90	52,3	54,2	59,2	6I,8	65,6	69,I	73,3	78,6	82,5	86,0	89,3

Продолжение табл.X

f	q									
	40,0	30,0	20,0	I0,0	5,0	2,5	I,0	0,5	0,I	0,05
7I	73,4	76,7	80,8	86,6	9I,7	96,2	I0I,6	I05,4	II3,6	II6,9
72	74,4	77,8	8I,9	87,7	92,8	97,4	I02,8	I06,6	II4,8	II8,I
73	75,4	78,8	82,9	88,8	93,9	98,5	I04,0	I07,9	II6,I	II9,4
74	76,4	79,9	84,0	90,0	95,I	99,7	I05,2	I09,I	II7,3	I20,7
75	77,5	80,9	85,I	9I,I	96,2	I00,8	I06,4	II0,3	II8,6	I2I,9
76	78,5	82,0	86,I	92,2	97,4	I02,0	I07,6	III,5	II9,9	I23,2
77	79,5	83,0	87,2	93,3	98,5	I03,2	I08,8	II2,7	I2I,I	I24,5
78	80,5	84,0	88,3	94,4	99,6	I04,3	II0,0	II3,9	I22,3	I25,7
79	8I,5	85,I	89,3	95,5	I00,7	I05,5	III,I	II5,I	I23,6	I27,0
80	82,6	86,I	90,4	96,6	I0I,9	I06,6	II2,3	II6,3	I24,8	I28,3
8I	83,6	87,2	9I,5	97,7	I03,0	I07,8	II3,5	II7,5	I26,I	I29,5
82	84,6	88,2	92,5	98,8	I04,I	I08,9	II4,7	II8,7	I27,3	I30,8
83	85,6	89,2	93,6	99,9	I05,3	II0,I	II5,9	II9,9	I28,6	I32,0
84	86,6	90,3	94,7	I0I,0	I06,4	III,2	II7,I	I2I,I	I29,8	I33,3
85	87,7	9I,3	95,7	I02,I	I07,5	II2,4	II8,2	I22,3	I3I,0	I34,5
86	88,7	92,4	96,8	I03,2	I08,6	II3,5	II9,4	I23,5	I32,3	I35,8
87	89,7	93,4	97,9	I04,3	I09,8	II4,7	I20,6	I24,7	I33,5	I37,0
88	90,7	94,4	98,9	I05,4	II0,9	II5,8	I2I,8	I25,9	I34,7	I38,3
89	9I,7	95,5	I00,0	I06,5	II2,0	II7,0	I22,9	I27,I	I36,0	I39,5
90	92,8	96,5	I0I,I	I07,6	II3,I	II8,I	I24,I	I28,3	I37,2	I40,8

Продолжение табл. X

f	q										
	99,95	99,9	99,5	99,0	97,5	95,0	90,0	80,0	70,0	60,0	50,0
9I	53,0	54,9	60,0	62,6	66,5	70,0	74,2	79,5	83,5	87,0	90,3
92	53,8	55,7	60,8	63,4	67,4	70,9	75,I	80,4	84,4	88,0	9I,3
93	54,5	56,5	6I,6	64,2	68,2	7I,8	76,0	8I,4	85,4	88,9	92,3
94	55,3	57,2	62,4	65,I	69,I	72,6	76,9	82,3	86,4	89,9	93,3
95	56,I	58,0	63,2	65,9	69,9	73,5	77,8	83,2	87,3	90,9	94,3
96	56,8	58,8	64,I	66,7	70,8	74,4	78,7	84,2	88,3	9I,9	95,3
97	57,6	59,6	64,9	67,6	7I,6	75,3	79,6	85,I	89,2	92,9	96,3
98	58,4	60,4	65,7	68,4	72,5	76,2	80,5	86,I	90,2	93,8	97,3
99	59,I	6I,I	66,5	69,2	73,4	77,0	8I,4	87,0	9I,2	94,8	98,3
I00	59,9	6I,9	67,3	70,I	74,2	77,9	82,4	87,9	92,I	95,8	99,3

Продолжение табл.X

	q									
f	40,0	30,0	20,0	I0,0	5,0	2,5	I,0	0,5	0,I	0,05
9I	93,8	97,6	I02,I	I08,7	II4,3	II9,3	I25,3	I29,5	I38,4	I42,0
92	94,8	98,6	I03,2	I09,8	II5,4	I20,4	I26,5	I30,7	I39,7	I43,3
93	95,8	99,6	I04,2	II0,9	II6,5	I2I,6	I27,6	I3I,9	I40,9	I44,5
94	96,8	I00,7	I05,3	III,9	II7,6	I22,7	I28,8	I33,I	I42,I	I45,8
95	97,9	I0I,7	I06,4	II3,0	II8,8	I23,9	I30,0	I34,2	I43,3	I47,0
96	98,9	I02,8	I07,4	II4,I	II9,9	I25,0	I3I,I	I35,4	I44,6	I48,2
97	99,9	I03,8	I08;5	II5,2	I2I,0	I26,I	I32,3	I36,6	I45,8	I49,5
98	I00,9	I04,8	I09,5	II6,3	I22,I	I27,3	I33,5	I37,8	I47,0	I50,7
99	I0I,9	I05,9	II0,6	II7,4	I23,2	I28,4	I34,6	I39,0	I48,2	I5I,9
I00	I02,9	I06,9	III,7	II8,5	I24,3	I29,6	I35,8	I40,2	I49,4	I53,2

Т а б л и ц а XI

Значения r для z от 0,00 до 2,99

z	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0I00	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898
I	0997	I096	II94	I293	I39I	I489	I586	I684	I78I	I877
2	I974	2070	2I65	2260	2355	2449	2543	2636	2729	282I
3	29I3	3004	3095	3I85	3275	3364	3452	3540	3627	37I4
4	3800	3885	3969	4053	4I36	42I9	430I	4382	4462	4542
5	462I	4699	4777	4854	4930	5005	5080	5I54	5227	5299
6	5370	544I	55II	5580	5649	57I7	5784	5850	59I5	5980
7	6044	6I07	6I69	623I	629I	635I	64II	6469	6527	6584
8	6640	6696	675I	6805	6858	69II	6963	70I4	7064	7II4
9	7I63	72II	7259	7306	7352	7398	7443	7487	753I	7574
I,0	76I6	7658	7699	7739	7779	78I8	7857	7895	7932	7969
I	8005	804I	8076	8II0	8I44	8I78	82I0	8243	8275	8306
2	8337	8367	8397	8426	8455	8483	85II	8538	8565	859I
3	86I7	8643	8668	8692	87I7	874I	8764	8787	88I0	8832
4	8854	8875	8896	89I7	8937	8957	8977	8996	90I5	9033
5	905I	9069	9087	9I04	9I2I	9I38	9I54	9I70	9I86	920I
6	92I7	9232	9246	926I	9275	9289	9302	93I6	9329	934I
7	9354	9366	9379	939I	9402	94I4	9425	9436	9447	9458
8	9468	9478	9488	9498	9508	95I8	9527	9536	9545	9554
9	9562	957I	9579	9587	9595	9603	96II	96I8	9626	9633
2,0	9640	9647	9654	966I	9668	9674	9680	9686	9693	9699
I	9704	97I6	97I6	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753
2	9757	9762	9767	977I	9776	9780	9785	9789	9793	9797
3	980I	9805	9809	98I2	98I6	9820	9823	9827	9830	9834
4	9837	9840	9843	9846	9849	9852	9855	9858	986I	9864
5	9866	9869	987I	9874	9876	9879	988I	9884	9886	9888
6	9890	9892	9894	9897	9899	990I	9903	9904	9906	9908
7	99I0	99I2	99I4	99I5	99I7	99I9	9920	9922	9923	9925
8	9926	9928	9929	993I	9932	9933	9935	9936	9937	9938
9	9940	994I	9942	9943	9944	9945	9946	9947	9948	9949

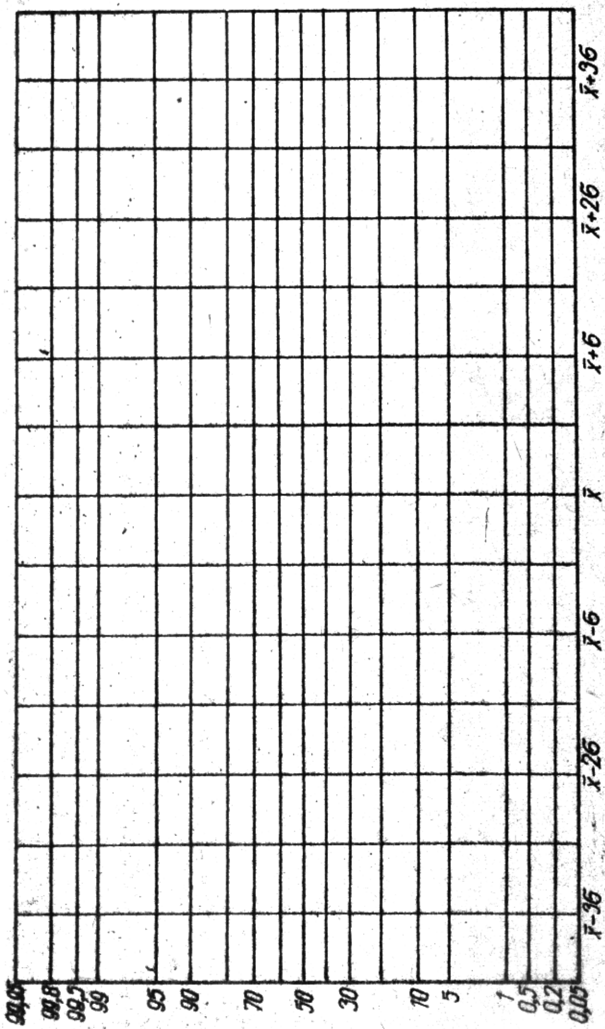

99,95
99,8
99,5
99
95
90
70
50
30
10
5
1
0,5
0,2
0,05
x̄-3σ
x̄-2σ
x̄-σ
x̄
x̄+σ
x̄+2σ
x̄+3σ

Рис.I.

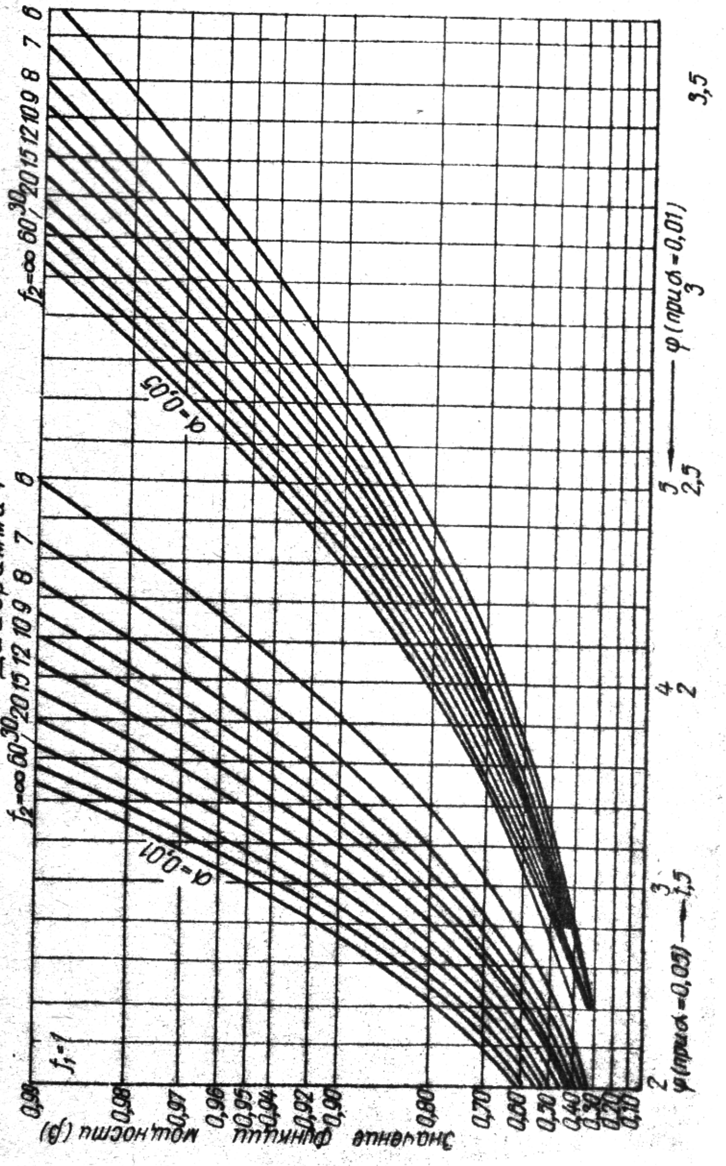


Диаграмма 1
$f_1=1$
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
α=0,01
α=0,05
0,99 0,98 0,97 0,96 0,95 0,94 0,92 0,90 0,80 0,70 0,60 0,50 0,40 0,30 0,20 0,10
Значение функции мощности (β)
φ (при α=0,05)
2 3 4 5
1,5 2 2,5 3 3,5
φ (при α=0,01)

Рис.II.

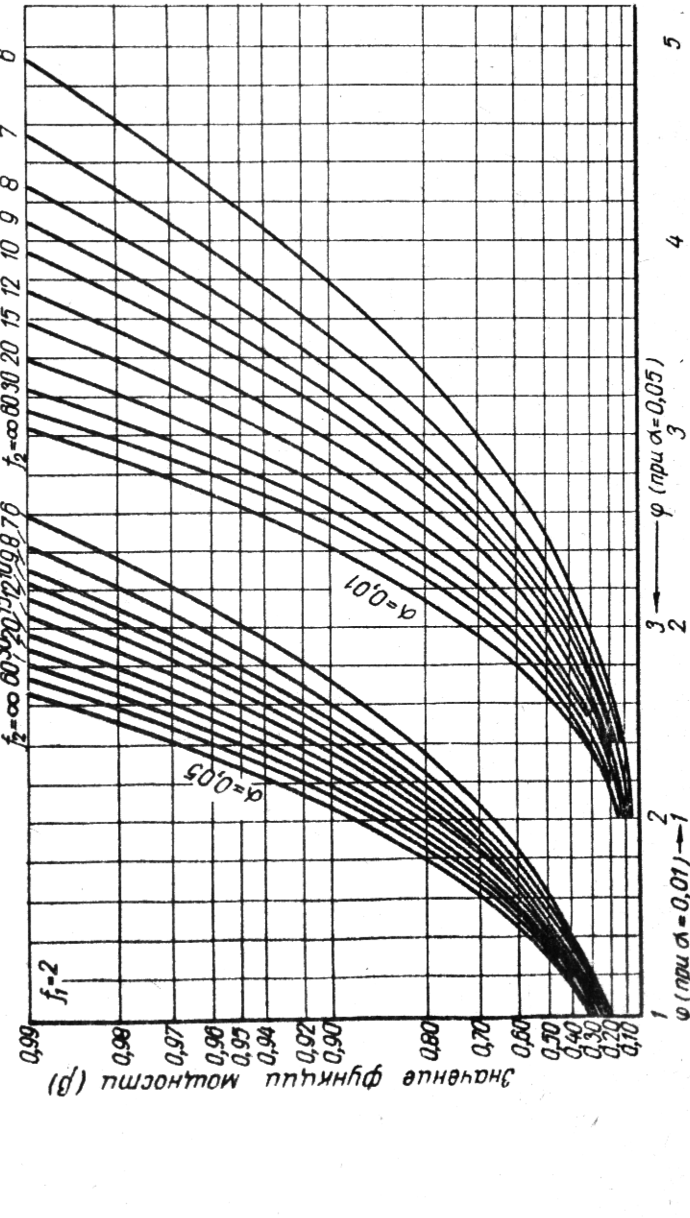


Диаграмма II
$f_1=2$
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
α=0,05
α=0,01
Значение функции мощности (β)
φ (при α=0,01) ⟶
φ (при α=0,05)

Рис. III.

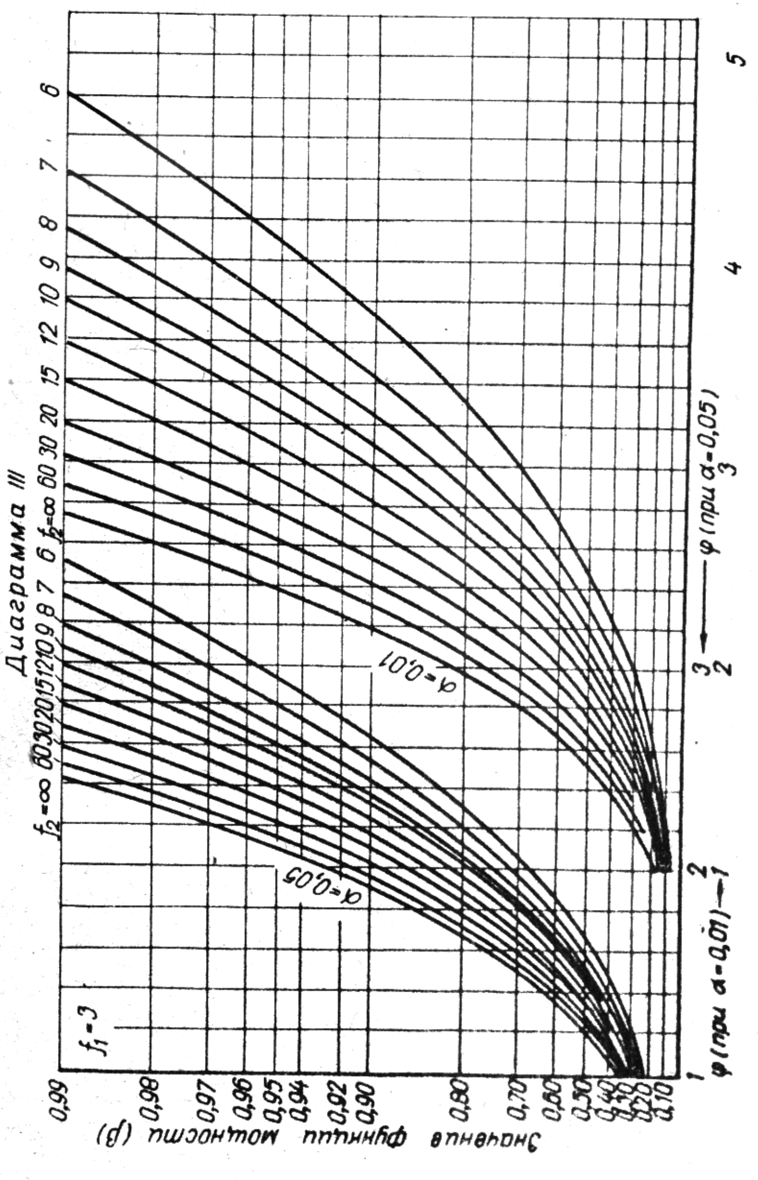


Диаграмма III
f1=3
f2=∞ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
f2=∞ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
α=0,05
α=0,01
φ (при α=0,01) — 1 2
φ (при α=0,05) 2 3 4 5
Значение функции мощности (β)
0,99 0,98 0,97 0,96 0,95 0,94 0,92 0,90 0,80 0,70 0,60 0,50 0,40 0,30 0,20 0,10

Рис.IУ.

Диаграмма IV

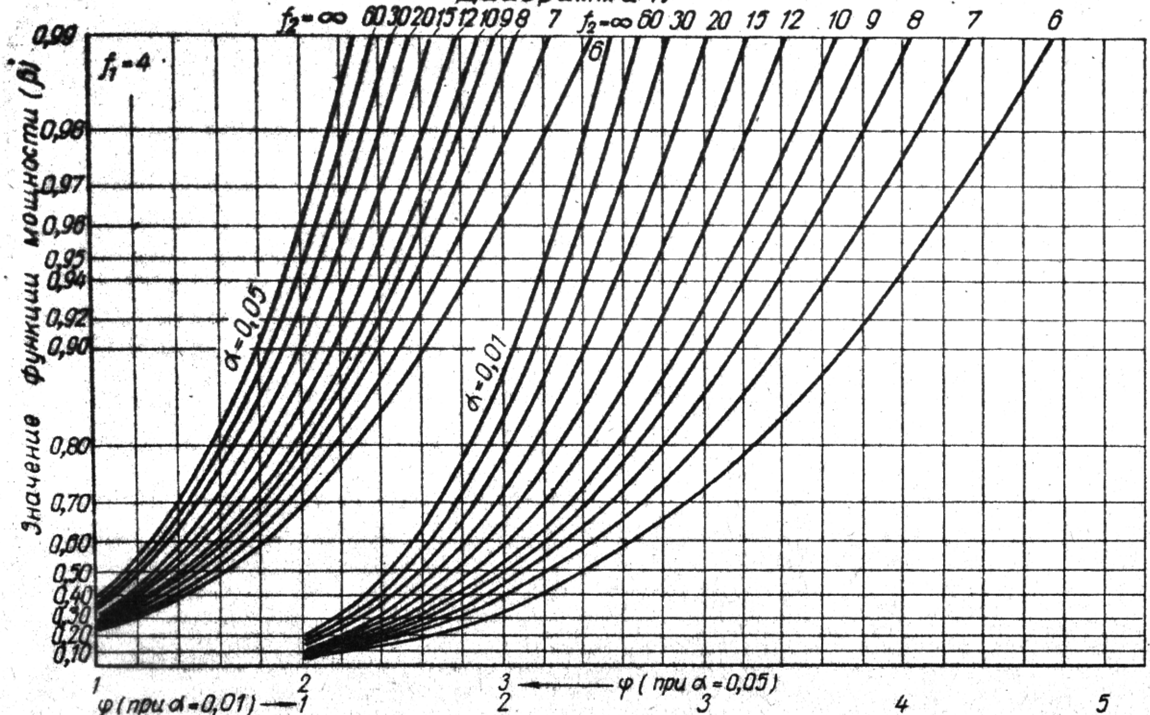


Рис. У.

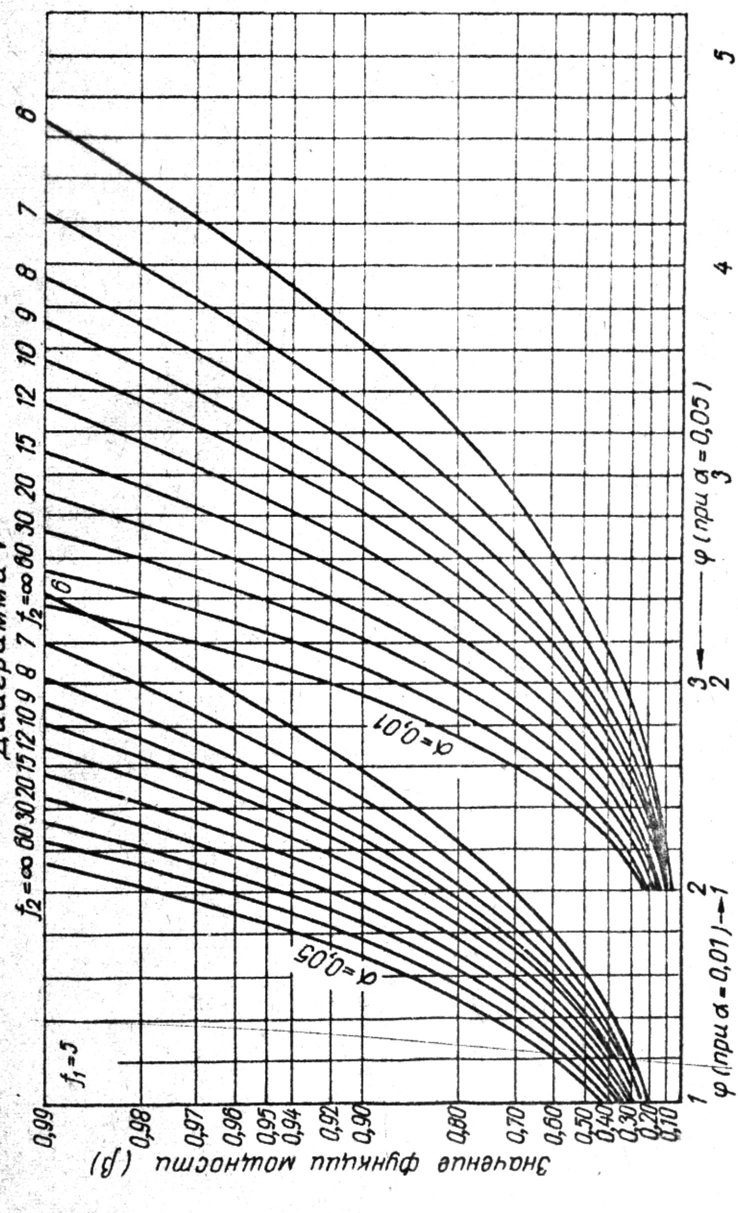


Диаграмма V
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
$f_1=5$
$\alpha=0,05$
$\alpha=0,01$
Значение функции мощности (β)
0,99 0,98 0,97 0,96 0,95 0,94 0,92 0,90 0,80 0,70 0,60 0,50 0,40 0,30 0,20 0,10
φ (при $\alpha=0,01$) ⟶ 1 2 3
φ (при $\alpha=0,05$) ⟵ 2 3 4 5

Рис.VI.

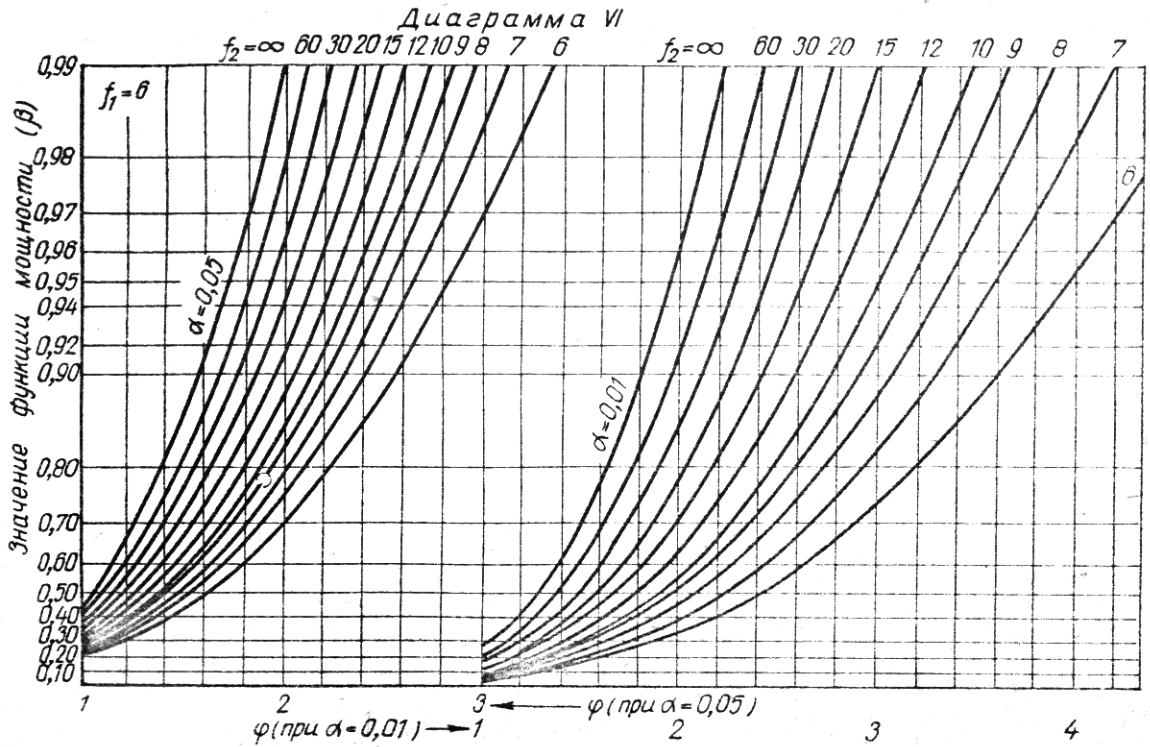


Диаграмма VI
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
$f_1=6$
Значение функции мощности (β)
0,99
0,98
0,97
0,96
0,95
0,94
0,92
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
$\alpha=0,05$
$\alpha=0,01$
1
2
3 ← φ (при $\alpha=0,05$)
φ (при $\alpha=0,01$) → 1
2
3
4

Рис.УII.

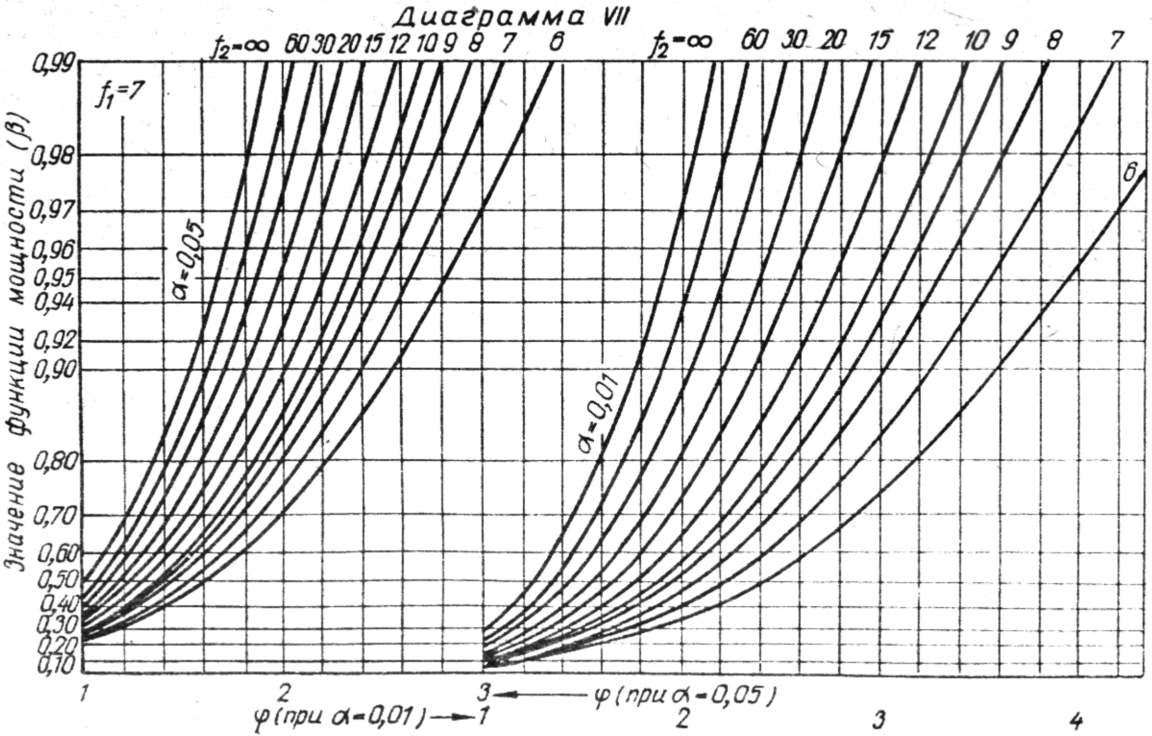


Диаграмма VII
$f_1=7$
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
$\alpha=0{,}05$
$\alpha=0{,}01$
Значение функции мощности (β)
0,99 0,98 0,97 0,96 0,95 0,94 0,92 0,90 0,80 0,70 0,60 0,50 0,40 0,30 0,20 0,10
1 2 3
φ (при $\alpha=0{,}01$) ⟶ 1
3 ⟵ φ (при $\alpha=0{,}05$)
2 3 4

Рис. VIII.

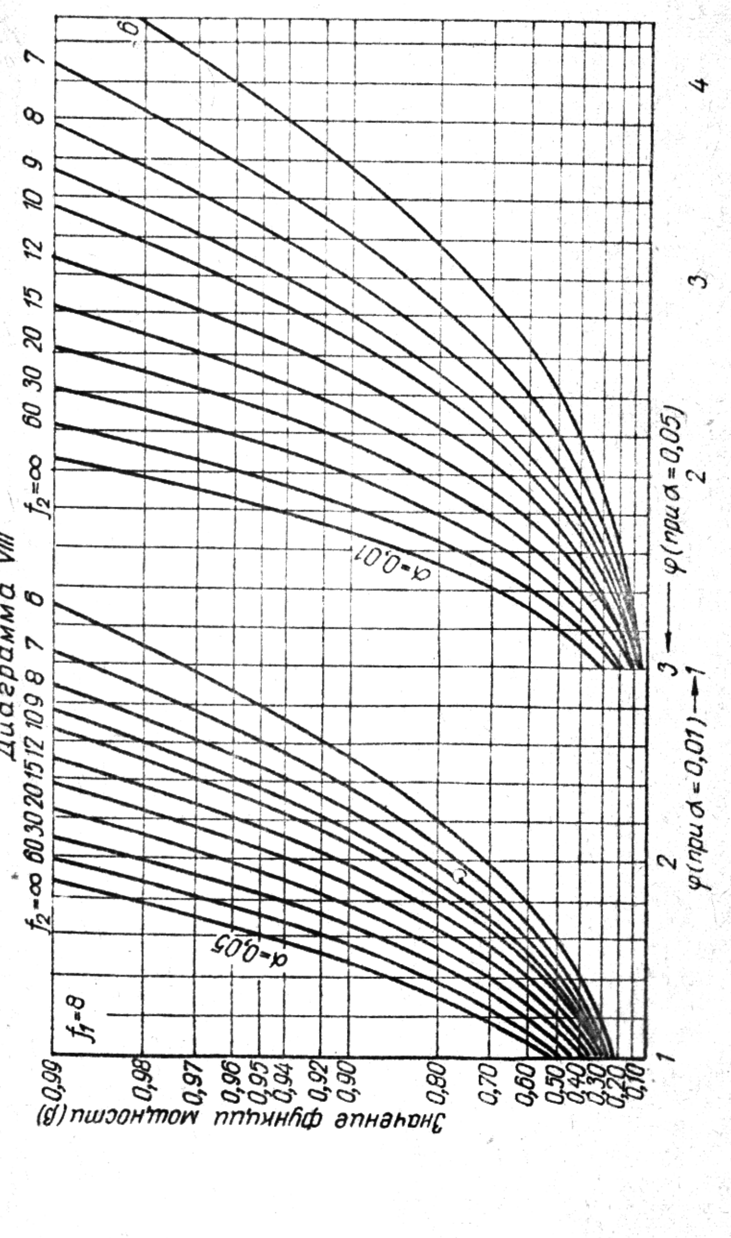


Диаграмма VIII
Значение функции мощности (β)
$f_1=8$
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
$f_2=\infty$ 60 30 20 15 12 10 9 8 7 6
α=0,05
α=0,01
0,99
0,98
0,97
0,96
0,95
0,94
0,92
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
1 2 3
φ (при α=0,01) ⟶
1 2 3 4
⟵ φ (при α=0,05)

Рис.IX.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Ответственный редактор
член-корр. АН УССР
Г.Г.ПОЛИКАРПОВ

Дина Степановна ПАРЧЕВСКАЯ

СТАТИСТИКА ДЛЯ РАДИОЭКОЛОГОВ

Литературный редактор Ж.Е.Квятковская
Технический редактор В.И.Голиков
Корректор Л.А.Панасенко

БФ 02074. Зак. № 2949 . Изд. № 98И. Тираж I500.
Формат бумаги 60х90 I/I6. Печ.физ.листов 7,25. Уч.-изд.листов 6,0.
Подписано к печати 9.XП 1968 г. Цена 42 коп.

Издательство "Наукова думка", Киев, Репина, 3.
Киевская книжная типография № 5, Киев, Репина, 4.