О ЗАВИСИМОСТИ СТЕПЕНИ РАСШИРЕНИЯ ПЯТЕН ПРИМЕСИ НА ПОВЕРХНОСТИ МОРЯ ОТ ВРЕМЕНИ

В. И. Зац

(Институт биологии южных морей АН УССР)

При исследовании процессов горизонтальной турбулентной диффузии мгновенных пятен примеси на поверхности моря очень важно знать характер зависимости степени расширения пятна от времени.

В настоящее время зависимость между тремя переменными величинами c (концентрация примеси в пятне), r (расстояние от центра пятна) и t (время) — заложена в решениях уравнения, описывающего процессы горизонтальной турбулентной диффузии.

В предлагаемой работе описан способ определения интервала времени, необходимого для того, чтобы мгновенное пятно в процессе диффузии увеличило свои размеры по горизонтали в поперечнике от l_0 (в начальный момент времени) до l, причем учтен характер зависимости коэффициента горизонтальной диффузии от масштаба явления.

В работах [5, 9, 10 и др.] на основе решения уравнения горизонтальной турбулентной диффузии пятен примеси в море при различных моделях задания коэффициентов обмена приводятся функции распределения концентрации примеси в пятне в зависимости от времени и расстояния от центра пятна.

Уравнение горизонтальной турбулентной диффузии пятен примеси в море для случая, когда течения отсутствуют, записывают в таком виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(l)\frac{\partial c}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K(l)\frac{\partial c}{\partial y}\right], \tag{1}$$

где c — концентрация диффундирующей примеси,

$K(l)$ — коэффициент горизонтальной диффузии, зависящей от масштаба явления l.

При условии горизонтальной изотропии процесса диффузии уравнение (1) в полярных координатах будет

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[K(r)\, r \frac{\partial c}{\partial r}\right]. \tag{2}$$

Если задать коэффициент горизонтальной диффузии в виде функции

$$K(r) = ar^n, \tag{3}$$

то уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[ar^n \cdot r \frac{\partial c}{\partial r}\right]. \tag{4}$$

Поскольку n изменяется лишь в интервале $0 < n < 2$, что вполне согласуется с имеющимися экспериментальными данными [1, 4, 8 и др.], уравнение (4) согласно [9] имеет следующее решение:

$$c(r, t) = \alpha\beta^{-\frac{2}{2-n}} e^{-\frac{r^{2-n}}{\beta}}, \tag{5}$$

где $\alpha = \dfrac{(2-n)\,Q}{2\pi\Gamma\left(\dfrac{2}{2-n}\right)}$; $\beta = (2-n)^2\ at$; $\Gamma\left(\dfrac{2}{2-n}\right)$ — гамма-функция, Q — общее количество диффундирующей примеси.

Соотношение (5) является общим решением для группы разновидностей процессов горизонтальной диффузии пятен примеси в море.

Из уравнения (5) при $n = \dfrac{4}{3}$ получается решение, найденное Р. В. Озмидовым [3] для случая осуществления «закона $\dfrac{4}{3}$»:

$$c(r, t) = \frac{Q}{6\pi\left(\frac{4}{9}\varepsilon\right)^3 t^3}\, e^{-\frac{r^{2/3}}{4/9\varepsilon t}}, \tag{6}$$

где ε — параметр диссипации энергии ($см^{2/3}/сек$). При $n = 1$, т. е. принимая, что зависимость коэффициента горизонтальной диффузии от масштаба явления носит линейный характер, выводится известное соотношение И. Иозефа и Г. Сенднера [9]:

$$c(r, t) = \frac{Q}{2\pi (Pt)^2}\, e^{-\frac{r}{Pt}}, \tag{7}$$

где P — параметр, характеризующий скорость диффузии ($см/сек$).

Из уравнения (5), полагая $n = 0$, т. е. принимая коэффициент диффузии постоянной величиной, выводится решение Фика:

$$c(r, t) = \frac{Q}{4\pi K t} e^{-\frac{r^2}{4Kt}}, \tag{8}$$

где K — коэффициент диффузии.

Решение А. Окубо [10], который для коэффициента горизонтальной диффузии использовал выражение

$$K(r) = kr^{2/3}t,$$

вытекает из уравнения такого же вида, что и уравнение (5):

$$c(r, t) = \frac{Q}{3/4\pi^{3/2}\alpha^3 t^3} e^{-\frac{r^{4/3}}{\alpha^2 t^2}}, \tag{9}$$

где α — параметр диссипации энергии.

Приведенные решения (а также и некоторые другие) показывают, что уменьшение максимума концентрации в центре пятна ($r = 0$) пропорционально t в различной степени, а именно t, t^2, t^3. Для случая использования «закона $\frac{4}{3}$» концентрация c в центре пятна уменьшается пропорционально t^3 (6); для случая, когда $n = 1$, концентрация уменьшается пропорционально t^2; когда $n = 0{,}4$, как это получено по опытам со свободно плавающими поплавками в районе Южного Крыма [1], концентрация в центре пятна уменьшается пропорционально $t^{1,25}$. Эксперименты, проведенные в различных районах Мирового океана, показывают, что по данным одних опытов падение концентрации в центре пятна пропорционально t^2, по данным других — t^3 [10], а в опытах И. Хела и А. Войпио [7] в Ботаническом заливе концентрация в центре пятна падает пропорционально $t^{2,4}$. Из указанных решений для фиксированных концентраций можно найти зависимость r от t. Так, можно определить изменение радиуса изолинии определенных концентраций во времени; найти время, необходимое, чтобы на определенных расстояниях от центра пятна концентрация достигла своего максимума. Кроме того, представляется возможным найти продолжительность (t_c) существования изолинии определенных концентраций $\left(\text{из (7), например, } t_c = \frac{1}{P}\sqrt{\frac{Q}{2\pi c}}\right)$, а также интервал времени ($t_м$), необходимый, чтобы данная изолиния достигла своего максимального удаления от центра пятна $\left(\text{из (7) } t_м = \frac{1}{eP}\sqrt{\frac{Q}{2\pi c}}\right.$ для максимального удаления от центра $\left. r_м = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{2Q}{\pi c}}\right)$.

Наряду с этим представляет интерес определить интервал времени, необходимый, чтобы пятно в процессе диффузии увеличило свои размеры от l_0 (поперечник пятна в начальный момент времени) до l. Такую задачу можно в первом приближении решить без привлечения данных о количестве диффундирующей примеси и ее концентрации в различных частях пятна. С этой целью воспользуемся выражением для коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии в дифференциальной форме, полученным из статистической теории турбулентной диффузии [3]:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\sigma^2)}{dt}, \tag{10}$$

где σ^2 — средняя величина квадрата отклонения частиц от среднего распределения.

Л. Ф. Ричардсон [11] показал, что связь между $K(l)$ и $K(\sigma)$ (где l — масштаб явления) изображается в виде

$$K(l) = 3{,}03 K(\sigma). \tag{11}$$

Н. Брукс [6], рассматривая уравнение (10) для решения другой задачи, исходил из того, что l и σ связаны соотношением

$$l = 2\sqrt{3}\sigma. \tag{12}$$

Воспользовавшись уравнением (12), а также полагая, что начальному диаметру пятна примеси на поверхности моря l_0 соответствует коэффициент горизонтальной диффузии K_0, определим на основании уравнения (10) отношение K/K_0:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{2K_0} \cdot \frac{2l}{12} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{l}{12K_0} \cdot \frac{dl}{dt}. \tag{13}$$

Далее принимаем, что коэффициент горизонтальной диффузии аппроксимируется степенной функцией, которая в общем виде (аналогично тому, как это делается во многих работах по атмосферной турбулентности, например, в [2]) записывается так:

$$\frac{K}{K_0} = \left(\frac{l}{l_0}\right)^n. \tag{14}$$

Тогда на основании (13) и (14):

$$\frac{K}{K_0} = \left(\frac{l}{l_0}\right)^n = \frac{l}{12K_0} \cdot \frac{dl}{dt}. \tag{15}$$

Переписав (15) в виде

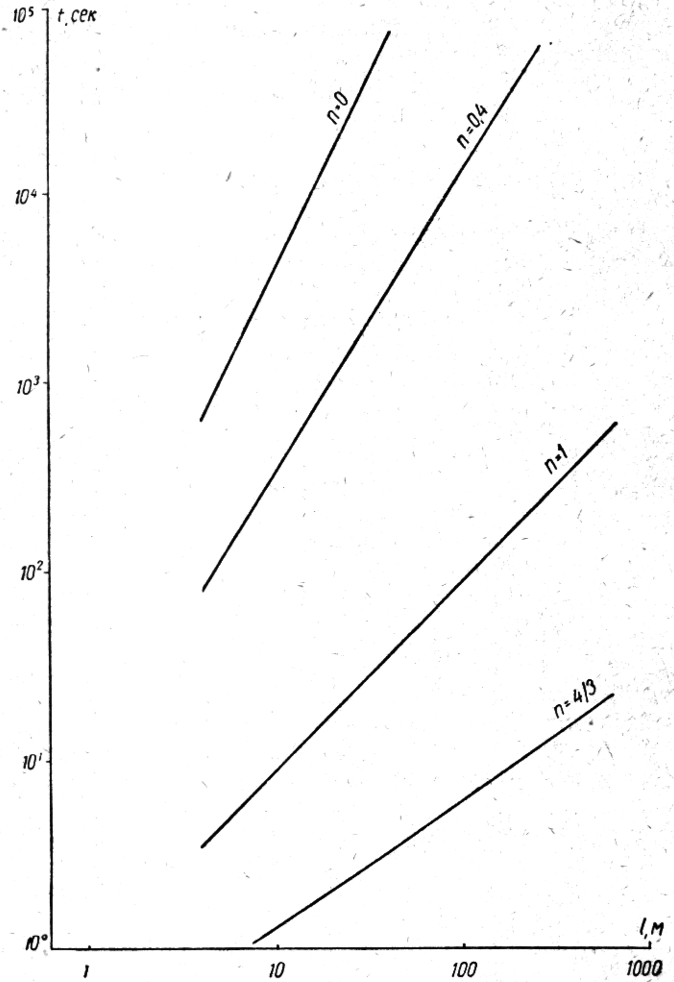
$$\frac{12K_0}{l_0^n} dt = \frac{dl}{l^{n-1}}$$

и проинтегрировав это выражение, получим

$$\frac{12K_0}{l_0^n} t = \left.\frac{l^{2-n}}{2-n}\right|_{l_0}^{l} = \frac{1}{2-n}\left(l^{2-n} - l_0^{2-n}\right), \tag{16}$$

откуда

$$t = \frac{l_0^n}{2-n} \cdot \frac{1}{12K_0} (l^{2-n} - l_0^{2-n}). \tag{17}$$



Зависимости величин l от t для четырех видов задания коэффициента горизонтального обмена. Шкалы логарифмические.

Если принять, что $l_0 = 1$,

$$t = \frac{1}{2-n} \cdot \frac{l^{2-n}}{12K_0}. \tag{18}$$

Уравнение (18) показывает, что время роста размеров пятна от $l_0 = 1$ до l существенно зависит от показателя степени n, определяющего характер зависимости коэффициента диффузии от масштаба явления, т. е. степени рассеяния пятна на поверхности моря. В таблице приведена сводка решений по (18) для четырех видов задания коэффициента горизонтальной диффузии.

Характер изменения коэффициента диффузии	n	t
K—const	$n=0$	$t=\frac{1}{24}\cdot\frac{l^2}{K_0}$
$K=c_1 l$ (линейный рост)	$n=1$	$t=\frac{1}{12}\cdot\frac{l}{K_0}$
$K=c_2 l^{4/3}$ («закон $^4/_3$»)	$n=^4/_3$	$t=\frac{1}{8}\cdot\frac{l^{2/3}}{K_0}$
$K=c_3 l^{0,4}$ (из работы [1])	$n=0{,}4$	$t=\frac{5}{96}\cdot\frac{l^{8/5}}{K_0}$

На рисунке для этих четырех случаев приведены кривые связи между l и t. Время роста пятна будет наименьшим в случае использования «закона $\frac{4}{3}$», так как для этого случая интенсивность диффузии оказывается наибольшей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зац В. И. К вопросу о горизонтальной турбулентной диффузии в прибрежной зоне Черного моря. — Океанология, **4**, 2, 1964, 249—257.
2. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометиздат, Л., 1961.
3. Монин А. С. Общий обзор по атмосферной диффузии. — В сб. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха (Оксфордский симпозиум 1958 г.), ИЛ, М., 1962.
4. Озмидов Р. В. Экспериментальное исследование горизонтальной турбулентной диффузии в море и искусственном водоеме небольшой глубины. — Изв. АН СССР, серия геофиз., 1957, 6.
5. Озмидов Р. В. Горизонтальная турбулентная диффузия пятен примеси в море. — Труды Ин-та океанолог., 1960, **37**, 164—181.
6. Brooks N. H. Diffusion of Sewage effluent in an oceancurrent. — Proc. I Intern. conf. on Waste disposal in the Marine Environment. Univ. of California, Berkeley, Pergamon Press, 1959.
7. Hela I., Voipio A. Tracer dyes asa means of studying turbulent diffusion in the Sea. — Soumalaisen tideakatemian toimituksia, Ser. A, VII, Physica, 1960, **69**.
8. Ichiye T., Olson F. C. W. Über die «neighbour diffusivity» im Ozean. — Dtsch. Hydr. Zs., 1960, **13**, 1.
9. Joseph I. und Sendner H. Über die Horizontal Diffusion im Meere. — Dtsch. Hydr. Zs., 1958, **11**, 2.
10. Ocubo A. A Review of Theoretical Models for Turbulent Diffusion in the Sea. — J. Ocean. Soc. of Japan, 1962, **20**, 286—320.
11. Richardson L. F. Atmospheric diffusion shown on a distanceneighboure graph. — Proc. Royal Soc. Ser. A., 1926, 110.