

УДК 551.46(262.5)

ОКЕАНОЛОГИЯ

© В.Н. ЕРЕМЕЕВ, Л.М. ИВАНОВ, О.В. МЕЛЬНИЧЕНКО

О НАХОЖДЕНИИ МОДОВОГО СОСТАВА ТРЕХМЕРНОГО ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОЛЯ

(Представлено академиком А.Ф. Трешниковым 22 V 1991)

Одним из мощных методов анализа полей сложной структуры в современной математической и теоретической физике является метод Галеркина [1]. В соответствии с этим методом характеристики полей представляются в виде рядов по некоторым базисным функциям. В теоретической физике эти функции получили название мод. Они характеризуют определенные типы движений (колебаний) в сплошной среде. В качестве таких мод наиболее часто используются собственные функции линеаризованной задачи динамики сплошной среды или электромагнитного поля. Распространение метода Галеркина на решение геофизических (и в первую очередь океанологических) задач оказалось весьма не простым делом, так как найти модовое разложение полей традиционными методами крайне сложно вследствие необходимости учета трехмерности движений, вращения Земли, топографии и пр. В настоящей статье мы предлагаем новый метод, который позволяет находить модовый состав бездивергентного поля скорости и скалярного поля (например, температуры) в областях произвольной формы. В этом случае пространственные структуры мод не зависят от динамических факторов и определяются только геометрией расчетной области.

Зададим трехмерное термогидродинамическое поле (u, T) на поверхностях $S(x) = \text{const}$. Поле нормалей к этим поверхностям $\vec{n} = \nabla S$. Сведем трехмерную задачу по нахождению модового состава полей u и T к системе двумерных спектральных задач.

Рассмотрим бездивергентное поле u . Воспользуемся его представлением через два скалярных потенциала Φ и Ψ , которое развито в работе [2]:

$$(1) \quad u = \text{rot}[(\vec{n} \cdot \Psi) + \text{rot}(\vec{n} \cdot \Phi)].$$

В этом случае, как показано в [2], Φ и Ψ удовлетворяют уравнениям

$$(2) \quad M_1 \Phi = -(\vec{n} \cdot u),$$

$$(3) \quad M_1 \Psi = -(\vec{n} \cdot \vec{\xi}) - \vec{n} \cdot \Delta(\vec{n} \times \nabla \Phi),$$

где M_1 — эллиптический линейный оператор, определенный на поверхности S , $\vec{\xi}$ — поле завихренности.

Уравнения (2), (3) являются обобщенными уравнениями Пуассона и переходят в обычные уравнения Пуассона в случае плоских, цилиндрических и сферических поверхностей.

Запишем решения (2) и (3) в виде*

$$(4) \quad \Phi = -\int G_1(\vec{n} \cdot u) dx,$$

$$(5) \quad \Psi = -\int G_2[(\vec{n} \cdot \vec{\xi}) + \vec{n} \cdot \Delta(\vec{n} \times \nabla \Phi)] dx,$$

* Далее для простоты математических выражений будем считать, что (2) и (3) имеют однородные граничные условия 1-го или 2-го рода, так как задачи Дирихле и Неймана с неоднородными граничными условиями для уравнения Пуассона всегда можно свести к аналогичным задачам с однородными граничными условиями [3].

где интегрирование ведется по поверхности S . G_1 и G_2 — функции Грина для уравнений (2), (3) с однородными граничными условиями.

Представим функции Грина в виде рядов по собственным функциям Φ_m и Ψ_n соответствующей спектральной задачи для обобщенного оператора Лапласа на поверхности S :

$$(6) \quad G_1 = \sum_{m=1}^M \mu_m^{-1} \Phi_m(x', s) \Phi_m(x, s),$$

$$(7) \quad G_2 = \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-1} \Psi_n(x', s) \Psi_n(x, s),$$

где x — двумерный вектор на поверхности.

Тогда решения (2) и (3) можно переписать в виде

$$(8) \quad \Phi = \sum_{m=1}^M \frac{b_m(t, s)}{\mu_m} \Phi_m(x, s),$$

$$(9) \quad \Psi = \sum_{n=1}^N \frac{a_n(t, s)}{\lambda_n} \Psi_n(x, s),$$

где

$$b_m(t, s) = - \int (\vec{\eta} \cdot \mathbf{u}) \Phi_m dx,$$

$$a_n(t, s) = - \int [(\vec{\eta} \cdot \vec{\xi}) + \vec{\eta} \cdot \Delta(\vec{\eta} \times \nabla \Phi)] \Psi_n dx.$$

Окончательное выражение для модового разложения имеет вид

$$(10) \quad u = \sum_n \lambda_n^{-1} \text{rot} [\vec{\eta} a_n \Psi_n] + \sum_m \mu_m^{-1} \text{rot rot} [\vec{\eta} b_m \Phi_m].$$

Обсудим вопрос о граничных условиях для Φ и Ψ . Следуя работе [4], запишем для любой точки граничной поверхности с радиус-вектором $\mathbf{r}$ уравнение

$$(11) \quad \vec{\eta} \times \text{rot}(\vec{\eta} \Phi) - \mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \vec{\eta}) = 0,$$

с помощью которого граничные условия легко выводятся.

Рассмотрим сходимость рядов (6)–(10). Ряды (6)–(9) сходятся абсолютно и равномерно [3]. Ряды в выражении (10) также сходятся равномерно, что можно показать, воспользовавшись признаком Абеля [3].

Таким образом, трехмерную задачу по определению модового состава u мы свели к набору двумерных спектральных задач для оператора Лапласа.

Обсудим теперь метод нахождения модового состава скалярного поля, эволюция которого описывается уравнением переноса

$$(12) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u_k \nabla_k T = L T, \quad k = 1, 2, 3,$$

где L — эллиптический линейный оператор, описывающий диффузионные процессы.

С помощью собственных функций обобщенного уравнения Гельмгольца

$$(13) \quad L_1 T_l + p_l^2 T_l = 0, \quad \int T_l \bar{T}_l dx = \delta_{ll'}$$

и функции Грина уравнения

$$(14) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - L_1 T = \delta(x - x') \delta(t - t'),$$

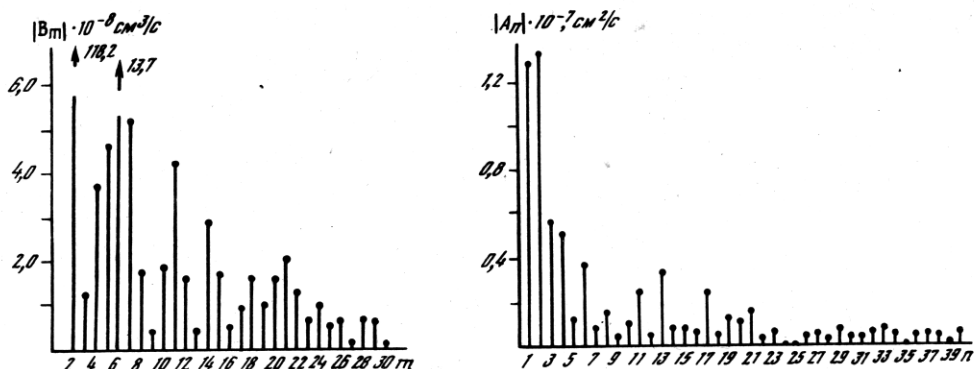


Рис. 1. Спектральный состав поля скорости на горизонте $z = 10$ м

где L_1 — часть оператора L , описывающая горизонтальную диффузию, $\bar{T}_t$ — комплексно-сопряженная функция, решение (12) можно записать:

$$(15) \quad T(x, s) = \sum_{i=1}^K D_i(t, s) T_i(x, s).$$

Граничные условия для (13) совпадают с граничными условиями для поля T . Сходимость ряда (15) равномерная [3].

Следовательно, мы свели трехмерную задачу по определению модового состава поля T к набору двумерных спектральных задач для оператора Гельмгольца.

Для иллюстрации предложенного в статье метода рассчитаем модовый состав горизонтального августовского климатического поля скорости в Черном море на горизонте 10 м, которое было восстановлено по модели [5] с использованием климатического поля плотности.

Для расчета Ψ_n , Φ_m , λ_n и μ_m решались спектральные задачи для оператора Лапласа на различных горизонтах $z = \text{const}$ ($\vec{\eta} = (0, 0, 1)$) с учетом реального берегового контура и рельефа дна. Использовались следующие граничные условия:

$$(16) \quad \Psi|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\eta}_{\Gamma}} = 0,$$

где $\vec{\eta}_{\Gamma}$ — нормаль к береговому контуру Γ , которые есть следствие условий прилипания, используемых при расчетах циркуляции в Черном море.

Типичные спектральные характеристики горизонтальной циркуляции изображены на рис. 1. В этой статье рассмотрим только вопросы скорости сходимости рядов в выражении (10), а также обсудим возможные методы, улучшающие скорость сходимости. В качестве критерия скорости сходимости используем функционал

$$(17) \quad J = \frac{\int (u_{MN}^2 + v_{MN}^2) dx}{\int (u^2 + v^2) dx} (\%).$$

В знаменателе стоит кинетическая энергия движений, а в числителе — кинетическая энергия движений, состоящих из $M + N$ мод. Интегрирование проводится по площади, ограниченной береговым контуром Γ .

Скорость сходимости рядов в (10) существенно зависит от уровня "шума", содержащегося в начальном поле плотности и, соответственно, в восстановленном по нему поле скорости. Поэтому улучшить скорость сходимости можно, или отфильтровав поля скорости в горизонтальной плоскости с помощью низкочастотного фильт-

Таблица 1
Энергосодержание различных модовых разложений J

Тип фильтрации		Адаптация			Гауссовский фильтр * с шириной окна		
N	M	5 сут	10 сут	20 сут	$2 \Delta x$	$4 \Delta x$	$8 \Delta x$
∞	∞	100	75,4	75,3	91,7	73,9	45,1
10	0	47,8	57,6	56,8	51,2	57,8	68,8
20	0	65,8	74,1	73,8	69,8	76,8	85,4
30	0	69,6	77,0	76,3	73,5	80,2	87,4
40	0	72,6	78,7	78,6	76,4	82,6	88,4
0	10	2,7	1,88	0,49	1,72	1,54	1,79
0	20	2,8	1,96	0,52	1,85	1,63	1,86
0	30	2,8	1,99	0,54	1,94	1,71	1,93
40	30	75,4	80,7	78,9	78,3	84,1	90,3

* Фильтровалось поле скорости, предварительно адаптированное на 5 суток; $\Delta x = 18$ км.

ра (в своих расчетах мы использовали фильтр Гаусса), или проводя адаптационные расчеты на срок до 20 суток. Результаты некоторых вариантов расчетов помещены в сводную табл. 1.

Анализ результатов расчетов показывает, что использование фильтрационной процедуры более предпочтительно, чем проведение адаптации, по трем причинам. Во-первых, при фильтрации не образуется новых энергодоминирующих пиков на спектре. При проведении адаптационных расчетов, начиная с 7–8 суток появляются новые энергодоминирующие пики. Во-вторых, скорость сходимости рядов в (10) после фильтрации выше, чем после адаптации даже на срок до 20 суток. В-третьих, фильтрация значительно экономнее с точки зрения затрат машинного времени.

В заключение выражаем благодарность С.В. Кочергину за проведение расчетов климатического поля скорости в Черном море и И.Ф. Гертману за подготовку климатических массивов плотности.

Морской гидрофизический институт
Академии наук УССР
Севастополь

Поступило
22 V 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 420 с.
2. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. – ДАН, 1985, т. 284, № 1, с. 103–106.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с.
4. Ivanov L. Reconstruction of thermohydrodynamic characteristics of ocean fields from quasi-lagrangian data. Norfolk: Old Dominion Univ., 1990. 56 p.
5. Климок В.И., Кочергин В.П., Фридрих Г. В кн.: Математическое моделирование динамических процессов в океане. Новосибирск, 1987, с. 4–28.